مبادئ الرياضيات

د. هادي مجيد الحداد

a:bc= 3,14 x+y



دار المريخ للنشر

مبادئ الرياضيات

مبادئ الرياضيات

د. هادي مجيد الحداد

تقديم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الانبياء والمرسلين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ومن اهتدى بهديه الى يوم الدين . . .

وبعد .

فكلية الاقتصاد والادارة جامعة الملك سعود ـ فرع القصيم اذ تقدم هذا الكتاب ضمن ما تقدم في مجال الاساليب الكمية ـ انما تعطى دليلاً على انها ماضية ـ بعون الله ـ في نهجها الذي انتهجته وهو ترجمة الكتب الاجنبية ، وذلك بهدف ملاحقة الجديد النافع والمفيد في حقول المعرفة المختلفة وتقديمه لابناء مملكتنا الحبيبة بصفة خاصة وابناء الوطن العربي بصفة عامة .

وكتاب مبادىء الرياضيات يعتبر في نظرنا كتاباً هاماً في هذا المجال ، وقد قام باعداده الدكتور هادي مجيد الحداد عضو هيئة التدريس بالكلية ، ونظراً لأهمية هذا الكتاب وقيمته العلمية فقد قررت الكلية تدريسه في مقرر الاساليب الكمية التمهيدية (٠٠١ كمى) الأمر الذي يعطي دلالة واضحة على تميّز منهجية الكلية وتمكين طلابها من الوقوف في مصاف طلاب البلاد المتقدمة .

وفي النهاية لا يسعني إلا ان أحيي هذا الجهد الصادق الذي بذله الدكتور هادي مجيد الحداد متمنياً له دوام التوفيق .

والله الموفق الى سواء السبيل .

الدكتور سلطان المحمد السلطان

عميد كلية الاقتصاد والادارة

مُقَـدّمَة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على خير رسله وخاتم انبيائه .

وبعد

فلما كان الطلاب الذين يقبلون بكلية الاقتصاد والادارة جامعة الملك سعود فرع القصيم يمثلون مستويات متفاوتة من التعليم فمنهم من ألـم ببعض الأسس الـرياضية ومنهم من لم يلّم ، ولما كانت الرياضيات تمثل ركيزة أساسية للدراسة بالكلية في مختلف المواد ، رأت الكلية ان يكون هناك برنامج لاعداد الطلاب المقبولين وتهيئتهـم لنـوعية الدراسة بها على ان يكون ذلك على مدى فصل دراسي يتلقى فيه الطالب درساً مكثفاً في مادة الرياضيات الى جانب مواد اخرى تراها الكلية أساساً لا يصح التهاون فيه .

وهذا الكتاب يشمل الأسس الرياضية التي رأينا لزوم الالمام بها لكل طالب ويبدأ الكتاب بتناول بعض الأسس الجبرية ثم يتدرّج خلال مفاهيم رياضية اخـرى وصـولاً بالطالب الى تصور واضح لحساب التفاضل والتكامل . وقد رأينا ان يدرّس هذا الكتاب في مادة الاساليب الكمية التمهيدية .

وتتدرّج موضوعات هذا الكتاب بالطالب تدرّجاً محسوباً على افتراض انه لا يعلم شيئاً عن أي اساس من الأسس الرياضية ، وانه ينبغي لنا ان نبدأ معه من نقطة الصفر في هذا المجال .

وقد اثبتت التجارب السابقة ان الطالب الجاد يستطيع ان يلم بهـذه الأسس وان يحقق تفوّقاً في تطبيقها ، وليس أدلّ على ذلك من ان طلاب المعاهد العلمية الذين التحقوا بالكلية خلو الوفاض من أي أساس رياضي استطاع عديد منهم ان يحقق سبقاً ملموساً وتفوّقاً .

وقد تم تجميع موضوعات هذا الكتاب من كتب مختلفة على أساس انتقائي راعينا فيه ما يتناسب مع الطالب المبتدىء من ناحية ، ومن ناحية اخرى ما يقدم له الأسس التي رأينا ضرورتها على نهج واضح دقيق .

على ان هذه الموضوعات المنتقاة لم ننقلها كما هي بحذافيرها وانما قمنا باجراء بعض اضافات توضيحية ، وبتبسيط بعض المواد المطروحة بما لا يخل بجوهرها حتى تتناسب مع التدرّج المطلوب هذا مع عناية مركزة بالجانب التطبيقي .

ونرجو ـ في النهاية ـ ان نكون قد وفقنا الى اختيار مواد هذا الكتاب وفي عرضها .

ولا يفوتنا في هذا المقام ان نذكر بكل تقدير ما وفرته لنا كلية الاقتصاد والادارة بجامعة الملك سعود فرع القصيم من مناخ وامكانيات كان لها الدور الاساسي في اعداد هذا الكتاب ، فضلاً عن التحفيز الأدبي والمعنوي الذي لاقيناه من سعادة الدكتور/ سلطان المحمد السلطان عميد هذه الكلية .

كما ونقدّم الشكر لكل من أسهم في انجاز هذا العمل ونخصّ بالذكر الدكتور عبد المرضى عزام لما قدّمه من اثراء لهذا الكتاب باقتراحاته البناءة كما نخص بالذكر السادة معيدي قسم الأساليب الكمية بالكلية على ما قاموا من ترجمة لبعض مسائل الكتاب ومراجعة فصوله كما ننوّه بالجهد المشكور الذي قام به سكرتير القسم الاستاذ عبد المنعم على محمد عفيفي في كتابة النسخة الخطية لهذا الكتاب .

ومن الله العون والسداد وهو وليّ التوفيق .

المحتويات

الباب الأول
نظرية الفئات

ان هدفنا في هذا الباب هو عرض مبسط لنظرية الفئات، وسنبدأ بدراسة لمفهوم الفئة ثم ندخل تدريجياً في العمليات الجبرية على الفئات.

ان الفئة ببساطة هي مجموعة من الأشياء أو العناصر المحددة تماما . وقد تكون هذه العناصر أعدادا أو أشخاصا أو أحداثا أو أي شيء آخر .

ويرمز الى الفئات بواسطة حروف كبيرة مثل A,B, C وهكذا . وتوضع هذه العناصر داخل أقواس {≷}. وبالتالي، فإن الفئة A التي تحتوي فقط على الأعداد 1,2,3,4, يمكن كتابتها كما يلي:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

ويعنى الرمز ϵ «عنصر ينتمي» "is an element of" ويستخدم ليبين عناصر الفئة . علس سبيل المثال ، تعني $2 \epsilon A$ أن 2 هي عنصر في الفئة A . ويعتبر الرمز $\notin$ نقيض للرمز ϵ ، أي أنه اذا كانت $5 \notin A$ فان ذلك يعني أن العنصر (العدد) 5 ليس عنصرا في الفئة A .
وتسمى فئة كل أعداد «العد» بالأعداد الطبيعية وهي :

$$N = \{ 1,2,3,4,5, \dots \}$$

وتعني النقط الثلاث امتداد للاعداد . وبالتالي ، فانه من المفهوم أن

$8 \epsilon N$ ، $7 \epsilon N$ ، $6 \epsilon N$ وهكذا .

ويمكن كذلك التعبير عن الفئات كما يلي :

{ x / p لها خاصية x } أو { p لها خاصية x/ x }

وتقرأ هذه كما يلي :

فئة كل العناصر x بحيث أن x لها الخاصية p

مثال « ١ » :

ضع كل العناصر التي يمكن وصفها كما يلي :

{x / x عدد طبيعي أصغر من 5 }

أي ضع كل الأعداد الطبيعية التي أقل من5

الحل :

العناصر التي تحقق الخاصية المعطاة هي الأعداد 1,2,3,4. وبالتالي فان الاجابة تكون

$\{ 1,2,3,4 \}$

تعتبر الفئتان متساويتين اذا احتويتا على نفس العناصر . وبالتالي ، فانه الفئة في المثال « ١ » يمكن أن تكتب :

{x/x عدد طبيعي اصغر من 5 } = $\{1, 2, 3, 4\}$

واذا كانت

$X = \{ a, 2, 3 \}$

$Y = \{ 2, a, 3, 2 \}$

اذن

$X = Y$

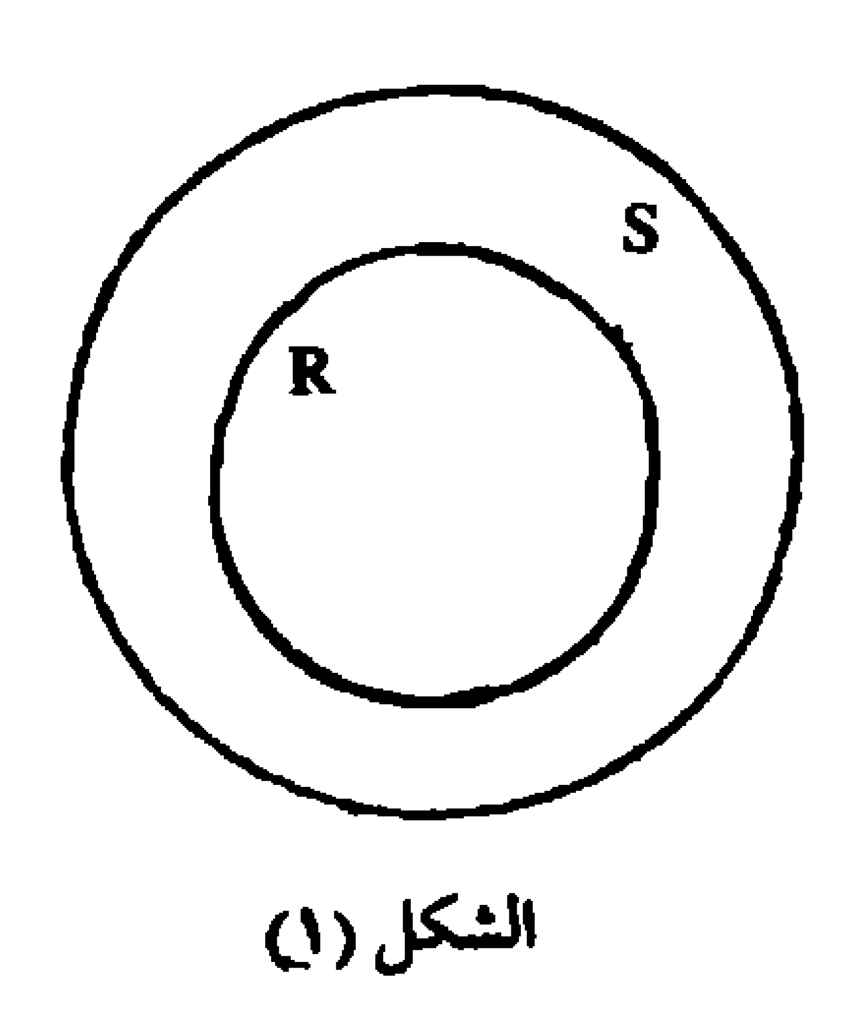
وذلك لأن كل فئة تحتوي فقط على العناصر a,2,3. ونلاحظ أن العناصر ليست بنفس الترتيب كما أن العدد 2 مكرر في الفئة Y ، ولكن ذلك لا يغير في حقيقة أن الفئتين متساويتان .

تعتبر الفئة R فئة جزئية (Subset) من فئة أخرى S (وتكتب: $R \subseteq S$)

اذا كان كل عنصر في R هو عنصر في S .

وتمثل الفئات غالبا بواسطة أشكال هندسية حيث تمثل المنطقة داخل الشكل عناصر

الفئة . وتسمى هذه الأشكال بأشكال فن (Venn Diagrams) . على سبيل المثال ، لكي نبين أن الفئة R هي فئة جزئية من الفئة S ، فانه يجب رسم شكل هندسي واحد يمثل R والتي هي بالكامل داخل شكل هندسي آخر يمثل S (الشكل ١) .



الشكل (١)

ويعتبر الرمز $\nsubseteq$ نقيض $\subseteq$ ، بحيث أن $T \nsubseteq S$ تعني أن T ليست فئة جزئية من S .

مثال « ٢ » :

اذا كان

$$A = \{ 0,1,2 \} , B = \{ 2,0,1 \} , C = \{ 0,2 \}$$

اذا :

$$A \subseteq B , B \subseteq A, C \subseteq A, C \subseteq B$$

ولكن :

$$A \nsubseteq C , B \nsubseteq C$$

في المثال « ٢» :

$$A \subseteq B, B \subseteq A$$

وذلك لأن A = B (ويستخدم ذلك أحيانا كتعريف لتساوي الفئات) . وعلاوة على ذلك فان

$$C \subseteq A$$

ولكن $C \neq A$

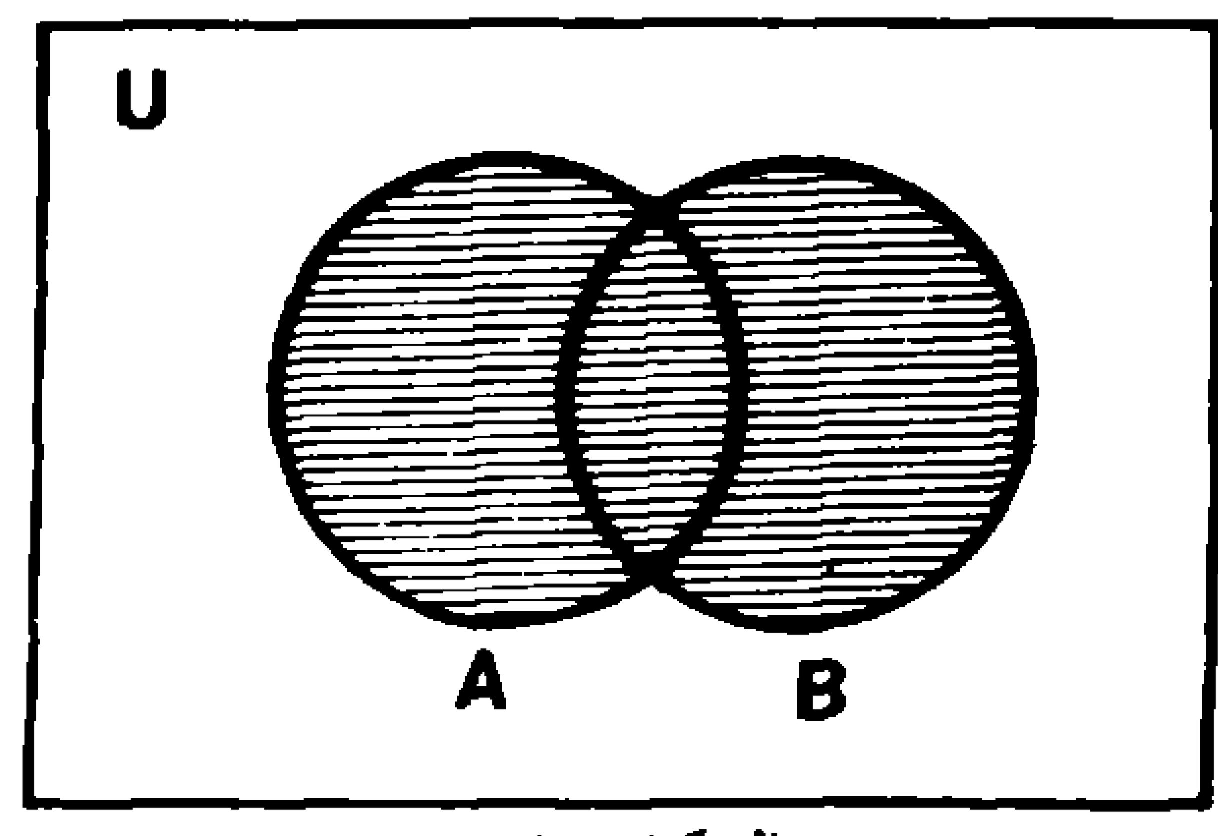
حيث أن $1 \in A$

ولكن $1 \notin C$

وعمليات اتحاد وتقاطع الفئات تعطى فئات جديدة من الفئات الأصلية . ويمكن كتابة اتحاد (Union) فئتين A,B كما يلي :

$$A \cup B$$

وهي فئة كل العناصر المنتمية الى أي من الفئتين A أو B او كليهما

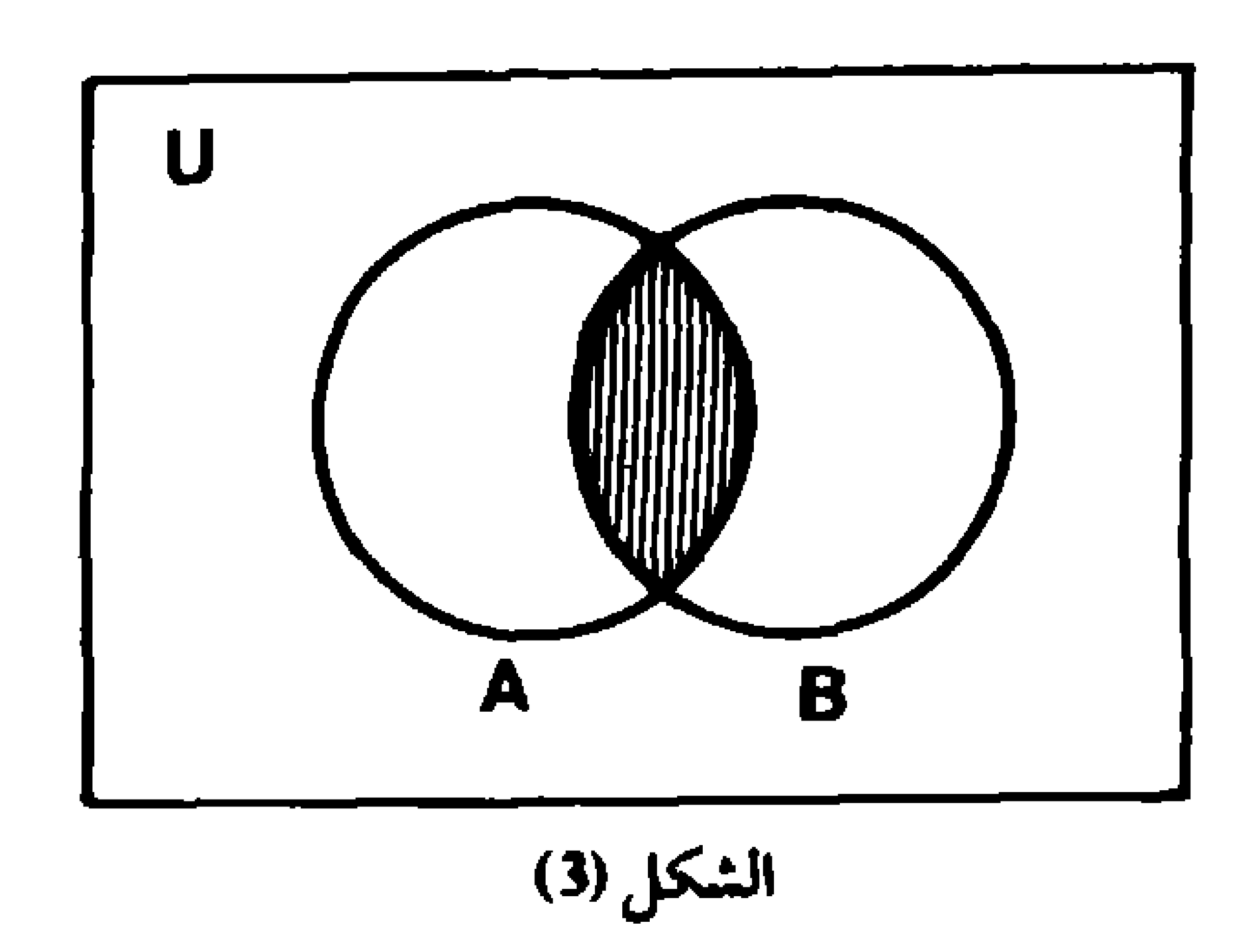


الشكل (2)

ويمكن كتابة تقاطع Intersection فئتين A,B كما يلي :

$$A \cap B$$

وهي الفئة المكونة من كل العناصر المنتمية الى كل من الفئتين A وB



الشكل (3)

مثال « ٣ » :

دع

$$A = \{1, 2, 3, x, y\}$$

$$B = \{3,4,5,x,w\}$$

اذن

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,x,y,w\}$$

وكذلك

$$A \cap B = \{3,x\}$$

ويمكن تطبيق مفهوم الاتحاد والتقاطع على اكثر من فئتين. فاتحاد مجموعة من الفئات هي الفئة المكوّنة من جميع العناصر التي تنتمي الى فئة واحدة على الأقل من هذه الفئات. وتقاطع مجموعة من الفئات هو الفئة المكوّنة من جميع العناصر التي تنتمي الى جميع هذه الفئات.

واذا كان هناك فئتان

$M = \{1, 2\}$

$N = \{x, y\}$

ليس بينهما عناصر مشتركة ، فان $M \cap N$ تكون «خالية» . وسوف نستخدم الرمز ϕ ليعبر عن ذلك . ويطلق على الرمز ϕ الفئة الخالية (Empty Set) وبالتالي فان $M \cap N = \phi$ تعني ان الفئتين غير متقاطعتين اي ليس بينهما عناصر مشتركة .

وفي مشكلة أو موقف خاص ، فاننا نهتم عادة بأشياء معينة فقط . وتسمى الفئة التي تحتوي على كل الأشياء تحت الاعتبار بالفئة الشاملة (Universal Set) .

مثال « ٤ » :

زهرة النرد هي مكعّب صغير يحتوي على 6 أوجه مرقّمة من 1 الى 6 وعند رمي زهرة النرد سوف يظهر رقم على الوجه العلوي. اي انه عند رمي الزهرة ، فان الفئة الشاملة هي

$U = \{1,2,3,4,5,6\}$

واذا كانت U هي الفئة الشاملة تحت الاعتبار وكانت A فئة جزئية من الفئة U ، فان الفئة المكملة للفئة A تكتب $\bar{A}$. وتعتبر $\bar{A}$ هي الفئة التي تحتوي على كل عناصر U غير الموجودة في الفئة A . أي ان

$\bar{A} = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$

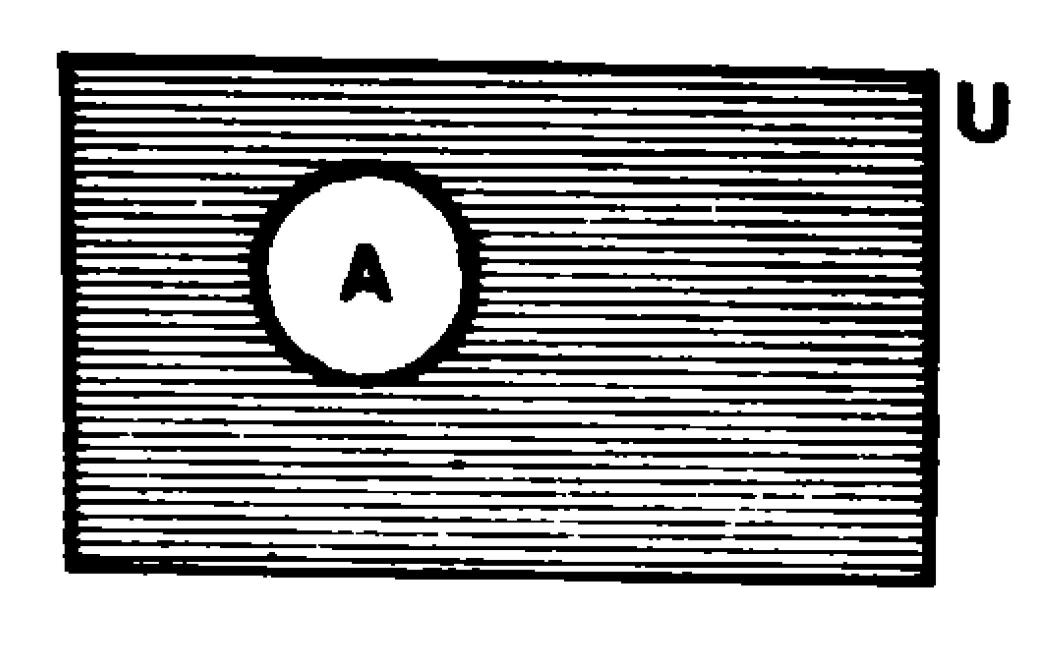
لاحظ أن الرمز "$\wedge$" يعني « و » .

مثال « ٥ » :

أنشئ شكل فن مبينا الفئة المكملة للفئة A.

الحل :

في الشكل (4) ، يمثل المستطيل الفئة الشاملة U . وتمثل الدائرة الفئة A ، كما تمثل المنطقة المظللة خارج الدائرة الفئة$\bar{A}$.



(الشكل(4))

ويكتب حاصل ضرب الفئتين A,B كما يلي A XB . ويعتبر حاصل الضرب هو الفئة المكونة من كل أزواج العناصر (a,b) التي المكوّن الأول فيها ينتمي الى A والمكوّن الثاني ينتمي الى B.

$$A \times B = \{ (a,b) / a \in A \text{ and } b \in B \}$$

ويعتبر ترتيب مكوّنات كل عنصر مهما . وبالتالي فان

$$(a,b) \neq (b,a)$$

فيما عدا الحالة التي تكون فيها a = b وتسمى الازواج من هذا النوع أزواجا مرتبة .

مثال « ٦ » :

أنشئ A X B ، علما بأن

$$A = \{ 1,2 \}$$

$$B = \{ w, x, y \}$$

الحل :

$$A \times B = \{ (1,w), (1,x), (1,y), (2,w), (2,x), (2,y) \}$$

وآخر مفهوم في دراستنا للفئات هو فئة الفئات (فئة القوى) (Power Set) لأية فئة A وهي الفئة المكونة من كل الفئات الجزئية للفئة A ومن بينها الفئة الخالية ϕ والفئة A نفسها .

مثال « ٧ » :

■ **أنشئ فئة الفئات للفئة :**

$U = \{ a, b, c \}$

الحل :

فئة الفئات للفئة U تساوي :

$P = \{ \phi , \{ a \} , \{ b \} , \{ c \} , \{ a,b \} , \{ a,c \} , \{ b,c \} , U \}$

وعموما ، اذا احتوت A على n من العناصر ، فان عدد الفئات في فئة الفئات يساوي 2^n . وفي مثال « ٧ » تحتوي الفئة U على 3 عناصر ، وبالتالي فان عدد عناصر فئة الفئات يساوي :

$2^3 = 8$

لاحظ أن أي عنصر من عناصر فئة الفئات يعتبر فئة جزئية من الفئة الشاملة U . لذا فان اتحاد أي عدد من هذه العناصر يعطي عنصرا في فئة الفئات كما أن تقاطع أي عدد من هذه العناصر يعطي عنصراً في فئة الفئات ، لذا فان فئة الفئات تعتبر مغلقة Closed, بالنسبة لعمليتي الاتحاد والتقاطع .

تمارين :

— في المسائل من (10 - 1) افرض أن $A = \{3, 4, 5, x, y\}$ ، $B = \{4, x, y, z\}$ أدخل الرمز ∈ او الرمز ∉ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

1.	3 ——— A	2.	x ——— A
3.	3 ——— B	4.	x ——— B
5.	z ——— A	6.	z ——— B
7.	I ——— A	8.	I ——— B
9.	A ——— B	10.	B ——— A

— في المسائل من (16 - 11) اسرد عناصر كل فئة . يمكنك استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر الفئة عندما يكون بها عدد لا نهائي من العناصر

11. {x/x عدد طبيعي أصغر من 7}
12. {x/x عدد طبيعي أصغر من 10}
13. {x/x عدد طبيعي أصغر من 6}
14. {y/y عدد طبيعي زوجي (يقبل القسمة على 2)}
15. {x/x حرف من حروف الهجاء المحصور بين C و H}
16. {x/x عدد طبيعي فردي (لا يقبل القسمة على 2)}

— في المسائل من 20 - 17 أدخل علامة = أو علامة ≠ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

17. $\{a, b, c\}$ ——————— $\{b, c, a\}$
18. $\{0, 1, 2, 3\}$ ——————— $\{0, 1, 2, 3, 3\}$
19. $\{x, y, z\}$ ——————— $\{x, y, z, w\}$
20. $\{1, 2, 3, \ldots\}$ ——————— {x/x عدد طبيعي}

— في المسائل من 30 - 21 أفرض ان $X = \{1, 2, 3, 4\}$ و $Y = \{4, 6, 8, 10\}$ أدخل الرمز

$\subseteq$ أو الرمز $\nsubseteq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

21.	$X ____ Y$	22.	$Y ____ X$
23.	$X ____ X \cup Y$	24.	$Y ____ X \cup Y$
25.	$X ____ X \cap Y$	26.	$\phi ____ X$
27.	$\phi ____ Y$	28.	$\phi ____ X \cap Y$
29.	$X ____ X$	30.	$X \cap Y ____ X \cup Y$

في المسائل من 40 - 31 الفئة الشاملة U هي فئة كل الأعداد الطبيعية الأصغر من 10 افرض ان $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ كون الفئات الآتية

31.	$A \cup B$	32.	$A \cap B$
33.	$\bar{A}$	34.	$\bar{B}$
35.	$\overline{A \cup B}$	36.	$\overline{A \cap B}$
37.	$\bar{A} \cap \bar{B}$	38.	$\overline{A \cup U}$
39.	$A \cap A$	40.	$B \cup B$

في المسائل من (45 - 41) كون أشكال فن التي تبين الفئات المطلوبة او العلاقات المطلوبة

41 . اتحاد فئتين منفصلتين

42 . تقاطع فئتين احداهما فئة جزئية من الأخرى

43 . العلاقة بين فئة الأعداد الطبيعية والفئة

{ x / x عدد طبيعي و 5 > x }

44 . اتحاد ثلاث فئات

45 . $\overline{A \cup B}$

في المسائل من (50 - 46) أذكر عناصر حاصل الضرب $A \times B$

47. $A = \{x, y, z\}$ ، $B = \{4, 5\}$ 46. $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{3\}$

49. $A = \{2, 3\} = B$ 48. $A = \{4,5\}$ ، $B = \{x, y, z\}$

50.
$A = \{x$ / x عدد طبيعي أصغر من $5\}$
$B = \{y$ / y عدد طبيعي أصغر من $3\}$

51 . هل $A \times B$ يساوي $B \times A$ دائماً أو احياناً أو لا يساويه ؟

اشرح ذلك .

52 . كون فئة القوى للفئة $V = \{1,2\}$

53 . كون فئة القوى للفئة $V = \{1, 2, 3, 4\}$

الباب الثاني
المفاهيم الأساسية في الجبر

ان هدفنا في هذا الباب هو عرض مادة أساسية لدراسة الجبر مستخدمين نظرية الفئات التي درسناها في الباب السابق ، فنبدأ بعرض لمفهوم الأعداد الحقيقية وخواصها ثم ندرس نظرية الأسس والجذور وكثيرات الحدود والمقادير النسبية والعمليات الجبرية عليها بالاضافة الى بعض الموضوعات الأخرى .

(٢ ـ ١) الأعداد الحقيقية

Real Numbers

تعتبر فئة الأعداد الحقيقية R من الفئات الهامة في الرياضيات . وعلى الرغم من
.لك فاننا لن نتعرض تفصيلياً لنظام الأعداد الحقيقية ولكننا سنتعرض باختصار لبعض
حواص فئة الأعداد الحقيقية ولبعض الاصطلاحات المستخدمة . وتعتبر عمليتا الجمع
ويعبر عنها بالرمز +) والضرب (ويعبر عنها بالرمز .) عمليتين أساسيتين على الأعداد
لحقيقية . وفيما يلي بعض الخصائص الهامة لفئة الأعداد الحقيقية R :

A1 ـ **خاصية الاغلاق** Closure Property :

فئة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عمليتي الجمع والضرب . ومعنى هذا انه اذا كان
ئل من x وy عدداً حقيقياً فكذلك يكون كل من العددين الوحيدين x + y و x.y
وكذلك يكتب xy) عدداً حقيقياً . يسمى العددان x + y و xy مجموع وحاصل
ضرب العددين x و y على التوالي :

A2 ـ **قوانين الابدال الجمعي والضربي** (Commutative Laws) :

لكل زوج x,y من الأعداد الحقيقية نجد ان

$x + y = y + x \qquad xy = yx$

A3 ـ **قوانين الترابط الجمعي والضربي** Associative Laws :

لكل X ، y ، z في R نجد ان

$(x+y) + z = x + (y+z)$

$(x.y).z = x.(y.z)$

A4 ـ **قانون التوزيع** Distributive Laws :

لكل x ، y ، z في R نجد ان

$x.(y+z) = x.y + x.z$

A5 ـ العنصر المحايد Identity Element :

يوجد عددان حقيقيان ، الصفر والواحد بحيث ان لكل عدد x في R

$x + 0 = x = 0 + x \qquad x.1 = x = 1.x$

A6 ـ عناصر عكسية Inverse Elements :

لكل عدد x في R يوجد سالب العدد x ويرمز له بالرمز $-x$ بحيث ان

$x + (-x) = 0$

لكل عدد $x \neq 0$ يوجد عدد حقيقي يسمى مقلوب العدد x (ويرمز له بالرمز $\frac{1}{x}$) بحيث

$$x . \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} . x$$

وتعتبر الخواص من A1 الى A6 من بديهيات الأعداد الحقيقية . وتنص الخاصية A3 على ان

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

لذلك فمن المعتاد ان يمثل $x + y + z$ العدد الحقيقي

$(x + y) + z$ أو $x + (y + z)$

وبنفس الطريقة نكتب $x.y.z$ بدلاً من $(x.y).z$ او $x.(y.z)$ ويمكن اثبات خواص اخرى كثيرة للأعداد الحقيقية باستخدام البديهيات A1 - A6 نذكر منها الخواص التالية :

افرض z, y, x أعداد حقيقية ، إذاً

(1) $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$

(2) $x.z = y.z, z \neq 0 \Rightarrow x = y$

(3) $x.y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ أو $y = 0$

تسمى الخاصية (١) خاصية الحذف للجمع وتسمى الخاصية (2) بخاصية الحذف

للضرب وتسمى الخاصية (3) قاعدة عوامل الصفر .

لكل $a \in R$ ، $b \in R$

(4) $a \, . \, 0 = 0$

(5) $(-1) a = -a$

(6) $-(-a) = a$

(7) $-(a+b) = (-a) + (-b)$

(8) $(-a) b = a (-b) = -ab$

(9) $(-a)(-b) = ab$

(10) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} \quad , \quad b \neq 0$

(11) $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b} \quad , \quad b \neq 0$

يمكن تعريف العمليتين الحسابيتين الطرح والقسمة بدلالة عمليتي الجمع والضرب على التوالي .

تعريف « ٤ » :

تعرف عملية الطرح (تمثل بـ (−)) حسب ما يأتي

$a - b = a + (-b)$

وتعرف عملية القسمة (تمثل بـ (÷)) حسب ما يأتي

$a \div b = a \, . \, \dfrac{1}{b} \quad , \quad b \neq 0$

نلاحظ هنا ان $a \div 0$ أو $\dfrac{a}{0}$ غير معرفة ، أي ان القسمة على الصفر غير مسموح بها .

يمكن اثبات القواعد الآتية للكسور (نفترض ان مقامات جميع هذه الكسور لا تساوي صفراً) :

(12) $b\left(\frac{a}{b}\right) = a$

(13) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

(14) $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

(15) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bC$

(16) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$

(17) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(18) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

(19) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

(20) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \equiv \frac{ad}{bc}$

بالاضافة المتكررة للعدد 1 نولد فئة الأعداد الطبيعية :

$N = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots \}$

الأعداد السالبة لهذه الأعداد الموجبة تكون فئة الأعداد الصحيحة السالبة :

$\bar{N} = \{ -1, -2, -3, \ldots \}$

الفئة

$Z = \bar{N} \cup N \cup \{0\}$

$= \{ 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots \}$

تسمى فئة الأعداد الصحيحة .

يسمى العدد x عدداً نسبياً Rational اذا كان من الممكن التعبير عنه بشكل $\frac{a}{b}$ حيث a ، b أعداد صحيحة ، $b \neq 0$. فمثلاً :

$$2.5, \frac{-5}{7}, 5$$

اعداد نسبية ، لأنه يمكن التعبير عنها بالأشكال

$$\frac{5}{2}, \frac{-5}{7}, \frac{5}{1}$$

على التوالي .

يرمز لفئة الأعداد النسبية بالرمز Q

$$Q = \{ X \mid X = \frac{a}{b}, a, b \in Z , b \neq 0 \}$$

اذا لم يكن هناك عامل مشترك بين a ، b يسمى الكسر $\frac{a}{b}$ انه في أبسط صورة . مثلا يمكن تحويل $\frac{8}{12}$ الى $\frac{2}{3}$ وذلك بضرب كل من البسط والمقام في $\frac{1}{4}$. نعلم انه من الممكن ضرب بسط ومقام أي كسر بعدد يختلف عن الصفر ، ولكن اذا أضيف أو طرح اي عدد يختلف عن الصفر الى بسط ومقام أي كسر فقيمة الكسر تتغير . فمثلاً :

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1+3}{2+3} = \frac{4}{5}$$

لدينا العلاقة التالية بين الفئات R, Q, Z, N

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

يمكن تمثيل الأعداد النسبية بواسطة كسور عشرية . مثلا العدد النسبي $\frac{4}{7}$ اذا قسمنا 4 على 7 نرى ان

$$\frac{4}{7} = 0.571428\overline{571428}$$

حيث أن الخط يشير الى أن هذه المجموعة من الأرقام تتكرر بصورة لا نهائية . يمكن تعميم هذا المفهوم كما يلي : افرض أن $\frac{a}{b}$ عدد نسبي ، $b \in N$. عند اجراء عملية القسمة

$$a \div b$$

نرى ان في كل مرحلة من مراحل القسمة ، يكون الباقي اما

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, b-1$$

(لماذا؟)

وهكذا نستمر في عملية القسمة حتى يبدأ باقي القسمة في التكرار ، عندما يتكرر باقي القسمة يتكرر خارج القسمة . وعليه يمكن تمثيل كل عدد نسبي بكسر عشري متكرر . عكس هذه النتيجة صحيح ايضاً ، اي ان كل كسر عشري متكرر يمثل عدداً نسبياً .

مثال « ١ » :

عبر عن العدد النسبي $0.4545\overline{45}$ بشكل نسبة عددين صحيحين .

الحل :

افرض ان $x = 0.4545\overline{45}$

بضرب طرفي المعادلة في 100 نحصل على

$$100x = 45.45\overline{45}$$

و

$$x = 0.45\overline{45}$$

بالطرح نحصل على

$$99x = 45$$

$$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

مثال « ٢ » :

عبر عن $2.12323\overline{23}$ كنسبة عددين صحيحين .

الحل :

افرض ان $x = 2.1232323\overline{23}$

يضرب الطرفين في 1000 نحصل على

$$(1) \quad 1000x = 2123.23\overline{23}$$

نضرب الآن الطرفين في 10 فنحصل على

$$(2) \quad 10x = 21.23\overline{23}$$

بطرح الأطراف المتناظرة للمعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$990x = 2102$$

$$x = \frac{2102}{990} = \frac{1051}{450}$$

من السهل الآن اعطاء مثال لكسر عشري غير متكرر . فمثلاً نلاحظ في الـكسر العشري

$$x = 3.02002000200002\ldots$$

حيث أن عدد الأصفار يزداد واحداً واحداً بعد كل 2 . وهكذا فان العدد x المذكور اعلاه ليس عدداً نسبياً . وتسمى الأعداد من هذا النوع أعداداً غير نسبية .

العدد $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي وذلك لأننا يمكن ان نثبت انه لا يمكن كتابته كنسبة عدد صحيح الى عدد صحيح آخر . أمثلة اخرى لأعداد غير نسبية هي

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}، \pi، \ 2+\sqrt{3}، \ \sqrt{7}، \ \sqrt{6}، \ \sqrt{5}، \ \sqrt{3}$$

يمكن اعتبار فئة الأعداد الحقيقية كفئة الكسور العشرية . وعليه فان فئة الأعداد الحقيقية R هي اتحاد فئتين منفصلتين ، الفئة Q للأعداد النسبية أو الكسور المتكررة والفئة I للأعداد غير النسبية او الكسور العشرية غير المتكررة . بالرموز .

$$R = Q \cup I$$

$$Q \cap I = \phi$$

وكذلك يمكن اثبات ان بين أي عددين حقيقيين عدداً لا نهاية له من الأعداد النسبية وعدداً لا نهاية له من الأعداد غير النسبية . مثلا بين العددين 1.1 ، 1.11 يمكن ادخال الأعداد النسبية

1.101

1.1001

1.10001

1.100001

وهكذا

وكذلك يمكن ادخال عدد لا نهاية له من الأعداد غير النسبية .

1. 1 0 2 3 2 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 ....

1. 1 0 0 2 3 2 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 3 ...

1.1 0 0 0 2 3 2 33 2 3 3 3 2 3 3 3 3 ...

وهكذا

تمارين (١) :

في المسائل 1 الى 12 اثبت كل تساو بذكر خاصية واحدة من خواص الأعداد الحقيقية .

1. $3 + 5$ عدد حقيقي
2. 4.7 عدد حقيقي
3. $3 + 6 = 6 + 3$
4. $2 + 0 = 2$
5. $1.6 = 6$
6. $2(3 + 4) = 2.3 + 2.4$
7. $4.5 = 5.4$
8. $4 + (-4) = 0$
9. $3.\frac{1}{3} = 1$
10. $(2 + 3) + 7 = 2 + (3 + 7)$
11. $0.1 = 0$
12. $(2.4).5 = 2.(4.5)$

13 . اثبت قانون الحذف (1) الخاص بالجمع .

14 . اثبت قانون الحذف (2) الخاص بعملية الضرب .

15 . اثبت قاعدة عوامل الصفر (قاعدة (٣)) { ملحوظة : افترض ان $a \neq 0$ ثم اضرب الجانبين في $\frac{1}{a}$.} .

في المسائل 16 الى 20 نفذ العمليات الحسابية الموضحة

16. $6.(-2 + 3)$
17. $7 - (-3) + 5$
18. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
19. $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}$
20. $\frac{(-2)(-2)}{4-(-3)} - \frac{(-2)[4-(2-3)]}{(-3)[5-(-1)]}$

في المسائل 21 الى 25 عبر عن كل عدد قياسي (نسبي) في صورة تمثيل عشري .

21. $\frac{1}{3}$ 22. $\frac{5}{7}$ 23. $\frac{21}{4}$ 24. $\frac{4}{9}$ 25. $\frac{3}{11}$

في المسائـل 26 الى 30 عبـر عن كل عدد قياسي (نسبـي) في صورة نسبـة عددين صحيحين .

26. 2.04 27. $4.\overline{9}$ 28. $2.\overline{13}$ 29. $2.2\overline{32}$ 30. $1.14\overline{35}$

31 . وضّح كيف نكّون عدد غير محدود من الأعـداد القياسية (النسبية) بـين 3.214 . 3.215

32 . وضّح كيف نكّون عدد غير محدود من الأعداد غير النسبية بين $\sqrt{2}$ و$\sqrt{3}$ (ملحوظة) $\sqrt{2}$ يساوي تقريباً 1.4142 و $\sqrt{3}$ يساوي تقريباً 1.7321) .

33 . افترض ان x هو عدد غير نسبي و a ، b هما اعداد نسبية . اثبت كلاً مما يأتي :

اذا كان $a \neq 0$ فان ax عدد غير نسبي .

اذا كان $a \neq 0$ فإن $ax + b$ عدد غير نسبي

(ملحوظة (أ) افترض ان ax هو عدد نسبي) .

34 . هل الفئات Q و I مغلقة تحت عملية :

b) الضرب a) الجمع

(٢ ـ ٢) المتباينات Inequalities :

لا بد أن تكون للقارىء فكرة بديهية عن فئة الأعداد الموجبة P . مثلا الأعداد الصحيحة الموجبة هي أعداد حقيقة موجبة . يكون كل عدد نسبي $\frac{a}{b}$ موجباً عندما يكون كل من a و b موجباً ، أو كلاهما سالباً ، سوف نعطي هنا البديهيات لفئة الأعداد الموجبة .

A7 هناك فئة جزئية P من الفئة R تسمى فئة الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث ان لكل عدد حقيقي a واحد وواحد فقط مما يأتي صحيح

$$a = 0, a \in P, -a \in P$$

نستنتج من ذلك انه اذا كان a موجباً فان a – سالب وبالمثل اذا كان a – موجباً فان $-(-a) = a$ سالب .

A8 اذا كان كل من a و b عدداً حقيقياً موجباً فان $a + b$ و $a.b$ كذلك اعداد حقيقية موجبة .

تسمى البديهية A7 بديهية الانقسام الى ثلاثة اجزاء ويمكن التعبير عن A8 بصيغة أخرى وهي ان فئة الأعداد الحقيقية الموجبة مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب . الأعداد التي تختلف عن الصفر والتي ليست موجبة تسمى اعداد حقيقية سالبة . نشير الى فئة الأعداد الحقيقية السالبة بالرمز $\bar{P}$. وهكذا فان

$$R = P \cup \bar{P} \cup \{0\} \qquad (1)$$

الفئات في يمين المعادلة (1) منفصلة زوجاً زوجاً .

نحن الآن باستطاعتنا تعريف المفهوم المهم للمتباينات .

تعريف ٥ :

لكل عددين حقيقيين a و b نقول ان a اكبر من b وتكتب $(a > b)$ اذا كان وفقط اذا كان $a - b$ موجباً . ونقول ان a اصغر من b وتكتب $(a < b)$ اذا كان وفقط اذا كان $a - b$ سالباً .

الرمز $a \geqslant b$ يشير الى ان $a > b$ أو $a = b$. وبالمثل $a \leqslant b$ يشـير الى ان $a < b$ أو $a = b$. بما ان $a - 0 = a$ نرى ان $a > 0$ اذا كان وفقط اذا كان a موجباً و $a < 0$ اذا كان وفقط اذا كان a سالباً .

أي تعبير يتضمن > ، ⩽ ، < ، ⩾ يسمى متباينة . نذكر هنا بعض الخواص المهمة للمتباينات .

الخاصية I : لكل زوج من الأعداد الحقيقية a و b واحدة فقط من العلاقات التالية صحيحة .

$$a > b ، \quad a = b ، \quad a < b$$

الخاصية II : اذا كان $a > b$ و $b > c$ فان $a > c$

الخاصية III : اذا كان $a > b$ فان $a + c > b + c$

الخاصية IV : اذا كان $a > b$ و $c > 0$ فان $ac > bc$

الخاصية V : اذا كان $a > b$ و $c < 0$ فان $ac < bc$.

سوف نثبت الخاصية IV وعلى القارىء اثبات بقية الخواص .

برهان الخاصية IV :

افـرض ان كلا من a و b و c عدد حقيقـي و $a>b$ و $C>0$. بمـا ان $a>b$ ، إذاً $a - b > 0$. وبما أن حاصل ضرب عددين موجبـين $(c, a - b)$ يسـاوي عدداً موجباً ، إذاً $(a - b)\, c > 0$ وحسب قانون التوزيع عندنا

$$ac - bc > 0$$

إذاً

$$ac > bc$$

يجب أن يلاحظ القارىء الخاصيتين IV و V بكل دقة ويجب ان يتذكر ان اتجاه المتباينة لا يتغير اذا ضرب طرفاها بعدد موجب (الخاصية IV) وان اتجاه المتباينة ينعكس أو يتغير اذا ضرب طرفاها بعدد سالب (الخاصية V) فمثلاً اذا ضربنا طرفي المتباينة $2 < 4$ في 2 نحصل على $4 < 8$. بينما اذا ضربنا طرفي المتباينة $2 < 4$ في -2 لحصلنا على $-4 > -8$

مثال « ١ » :

اذا كان $a \neq 0$ اثبت ان $a^2 > 0$

البرهان :

بما ان $a \neq 0$ ، فإما $a > 0$ وإما $a < 0$. افرض الآن ان $a > 0$. اذاً $a.a > 0.a = 0$ (الخاصية IV) ، إذاً $a^2 > 0$. افرض الآن أن $a < 0$ ، بمعنى آخر ان $0 > a$. إذاً $a.0 < a.a$ (الخاصية V) . اذا $o < a^2$ أو $a^2 > 0$.

نستنتج من هذا المثال أن $1 = 1^2$ عدد موجب .

مثال « ٢ » :

اذا كان $a > 0$ فان $\frac{1}{a} > 0$

البرهان :

هناك ثلاث امكانيات لـ $\frac{1}{a}$

(a) $\frac{1}{a}$ سالب (b) $\frac{1}{a} = 0$ (c) $\frac{1}{a}$ موجب

افرض أن $\frac{1}{a}$ سالب نضرب طرفي $a > 0$ في $\frac{1}{a}$ نحصل على

$$a \cdot \frac{1}{a} < 0 \cdot \frac{1}{a}$$

أو $1 < 0$

وهذا خاطىء .

اذا فرضنا الآن ان $\frac{1}{a} = 0$ نحصل من هذا

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} = a^2 \cdot 0 = 0$$

أو

$$a = 0$$

وهذا خلاف الغرض ان $a > 0$. وعليه يجب ان يكون $\frac{1}{a}$ موجباً أي ان $0 < \frac{1}{a}$

تمثل المتباينة

$$a < c < b$$

متباينة مركّبة وتعني صحة المتباينتين

$$c < b \quad , \quad a < c$$

معاً . فمثلاً $6 > 4 > 3$ تمثل متباينة صحيحة بينما لا تمثل

$4 > 1 > 3$ متباينة صحيحة

وتشير المتباينة

$$3 < x < 6$$

الى أن x تمثل عدداً أكبر من 3 وأصغر من 6 .

وبصورة عامة تعني المتباينة $a < c < b$ ان العدد c اكبر من a وأصغر من b ، أي انه محصور بين a و b . وللفئات التالية أهمية خاصة في الرياضيات وتسمى بالفترات (intervals) . فاذا كان $a < b$ فان :

(١) الفترة المفتوحة (open interval) من a الى b وتكتب بشكل (a,b) وتعرف كما يلي :

$$(a,b) = \{ x \mid a < x < b \}$$

(٢) الفترة المغلقة (closed interval) من a الى b وتكتب بشكل [a, b] وتعرف كما يلي :

$$[a,b] = \{ x \mid a \leqslant x \leqslant b \}$$

وتسمى a و b نقاط النهاية للفترة

(٣) اما الفترات نصف المفتوحة فيمكن تعريفها كما يلي :

$$[a,b) = \{ x \mid a \leqslant x < b \}$$

$$(a,b] = \{ x \mid a < x \leqslant b \}$$

ويشير القوس الصغير الى ان تلك النهاية مفتوحة ويشير القوس الكبير الى ان النهاية مغلقة .

(٤) واحدى الفترات غير المحددة unbounded interval هي

$$[a,\infty) = \{ x \mid a \leqslant x \}$$

والفترات التالية هي فترات غير محددة اخرى

$$(a,\infty) = \{ x \mid a < x \}$$

$$(-\infty, a) = \{ x \mid x < a \}$$

$$(-\infty, a] = \{ x \mid x \leqslant a \}$$

فئة الأعداد الحقيقية

$$(-\infty, \infty) = R$$

فيما يلي مفهوم مهم في الأعداد الحقيقية .

تعريف ٦ :

القيمة المطلقة Absolute Value لأي عدد حقيقي x (ويرمز له بالرمز $|x|$) تعرف كما يلي ؛

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

فمثلا

$$|4| = 4, |-4| = -(-4) = 4, |0| = 0, |7-13| = |-6| = 6$$

نستنتج من هذا التعريف الخواص التالية . اذا كان كل من x و y عدداً حقيقياً فان

(١) $0 \leq |x|$ و $-|x| \leq x \leq |x|$

(٢) $|x| = 0$ اذا واذا فقط $x = 0$

(٣) $|x|\,|y| = |xy|$

(٤) $|x-y| = |y-x|$

(٥) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ، $y \neq 0$

(٦) $|y| + |x| \geq |x+y|$

(٧) $|y| - |x| \leq |y-x|$

تمارين (٢) :

في المسائل من 1 الى 10 اعد كتابة الجملة مستخدماً الرموز > ، ≤ ، ≥ ، <

1. 4 ليست أكبر من 7
2. 3 أكبر من 4 -
3. 1 - ليست اكبر من 4
4. 2 - اقل من 5

5. 3 قيمة موجبة 6. -2 قيمة سالبة

7. x قيمة غير موجبة 8. x قيمة غير سالبة

9. $2x$ أكبر من او تساوي 5 واقل من 8

10. $a - b$ اكبر من 4 – واقل من أو تساوي 7

11 . اثبت الخاصية الأولى وهي :

لأي زوج من الأعداد الصحيحة b, a واحدة فقط من العلاقات التالية صحيحة

$a < b$ ، $a > b$ ، $a = b$

12 . اثبت الخاصية الثانية وهي .

لو ان $a > b$ ، $b > c$

فان $a > c$

13 . اثبت الخاصية الثالثة وهي .

لو أن $a > b$

فان $a + c > b + c$

14 . اثبت الخاصية الرابعة وهي .

لو ان $a > b$ ، $c < 0$

فان $ac < bc$

15 . اذا كان $a < b$ ، $c < d$ اثبت ان .

$a + c < b + d$

16 . اذا كان $0 < a < b$ اثبت ان .

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

(ملحوظة : اضرب كلا الطرفين في العدد الموجب $\frac{1}{ab}$) .

17 . اذا كان $0 < c < d, 0 < a < b$

أثبت أن $a c < b d$

18 . مثّل الأعداد الآتية هندسياً :

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $-\frac{3}{7}$

19 . مثل $\sqrt{5}$ على خط الأعداد

20 . باستخدام الفئات عبر عن كل فترة مما يأتي :

(a) $(1,3)$ (b) $[2,5]$ (c) $(3,8]$

(d) $[4,7)$ (e) $[-1,\infty)$ (f) $(-\infty, 2)$

(g) $(2,\infty)$ (h) $(-\infty,-3]$ (i) $(-\infty,\infty)$

21 . عبر عن كل فئة مما يأتي في صورة فترة :

(a) $\{x| -3 \leqslant x < 4\}$ (b) $\{x| 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ (c) $\{x|x > 2\}$

(d) $\{x|x \geqslant -2\}$ (e) $\{x|x \leqslant \frac{3}{2}\}$

22 . عبر عن كل مما يأتي بدون أعمدة القيم المطلقة :

(a) $|17|$ (b) $|-26|$ (c) $|-\frac{3}{8}|$

(d) $|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}|$ (e) $|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}|$ (f) $|\frac{2}{3}|+|-\frac{1}{2}|$

(g) $|\sqrt{2}-2|$ (h) $|\pi-4|$ (i) $|x-3|$ if $x < 3$

23 . عبر عن كل فئة على شكل فترة أو مجموعة فترات :

(a) $\{x|\ |x| < 3\}$, (b) $\{x\ |\ |x| > 2\}$

(c) $\{x|\ |x-1| < 4\}$, (d) $\{x|\ |x-2| > 5\}$

(٢ - ٣) الأسس Exponential Notation :

ابتكر الرياضي الفرنسي رينيه ديكارت رمز الأسس في القرن السابع عشر . فمثلاً x^2 تمثل $x.x$ ، وتمثل x^3 حاصل الضرب $x.x.x$ ، وبصورة عامة ، اذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فيعرف الرمز x^n حسب العلاقة

$$(1) \quad x^n = \underbrace{x.x.x.\ldots.x}_{\text{مرات } n}$$

حيث يظهر العامل x, n من المرات في الجهة اليمنى من المعادلة (1) . اذا كان $n = 1$ ، فنكتب x بدلاً من x^1 . نقرأ الرمز x^n « x للقوة n » . وفيما يلي بعض الأمثلة على الأسس

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{81}$$

$$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$$

ومن المهم أن نلاحظ ان $3x^3$ تعنى $3(x)^3$ بينما $(3x)^3$ تعنى

$$(3x)(3x)(3x) = 27x^3$$

وبالمثل $-3x^3$ تعنى $-3(x)^3$ ولا تعنى $(-3x)^3$

يمكن اثبات قوانين الأسس التالية من التعريف . اذا كان كل من x, y عدداً حقيقياً وكان كل من m , n عدداً صحيحاً موجباً فان

$$(2) \quad x^m x^n = x^{m+n}$$

$$(3) \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$(4) \quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$(5) \quad \frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & m > n \\ 1 \quad , & m = n \\ \dfrac{1}{x^{n-m}} \quad , & m < n \end{cases} \quad , x \neq 0$$

$$(6) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$$

ويحتاج البرهان الدقيق للخاصية رقم(2) الى استخدام الاستنتاج الرياضي نلاحظ أن

$$x^m . x^n = (x . x . x \ldots\ldots\ldots x) \; . (x . x \ldots\ldots\ldots x)$$

m من المرات　　n من المرات

$$= x . x \ldots\ldots\ldots\ldots x$$

m + n من المرات

$$= x^{m+n}$$

ويمكن اثبات القوانين الأخرى بطرق مماثلة . كما يمكن تعميم قوانين الأسس الى قواعد عامة مثل القاعدة

$$x^m . x^n . x^p = x^{m+n+p}$$

مثال «١» :

بسط كلا مما يأتي :

$$(a) \; \frac{2^7 . 3^2}{2^4 . 3^5}$$

$$(b) \; \frac{4^5 . (64)^3 . 2^4}{8^6 . (128)^2}$$

$$(c) \; (3x^3 y^2)(5x^4 y^6)$$

$$(d) \; \left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^3 \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2 \left(\frac{x}{2y}\right)^4$$

الحل :

نستخدم قوانين التبديل والترابط بصورة متكررة لنغير ترتيب العوامل وسوف لا نعطي التفاصيل بعد الآن

$$(a) \; \frac{2^7 . 3^2}{2^4 . 3^5} = \frac{2^7}{2^4} \cdot \frac{3^2}{3^5} = 2^{7-4} . \frac{1}{3^{5-2}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

$$\text{(b)}\ \frac{4^5 . (64)^3 . 2^4}{8^6 . (128)^2} = \frac{(2^2)^5 . (2^6)^3 . 2^4}{(2^3)^6 . (2^7)^2} = \frac{2^{10} . 2^{18} . 2^4}{2^{18} . 2^{14}} = \frac{2^{32}}{2^{32}} = 1$$

$$\text{(c)}\ (3x^3 y^2)(5x^4 y^6) = 3 . 5x^3 . x^4 . y^2 . y^6 = 15x^7 y^8$$

$$\text{(d)}\ \left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^3 \left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2 \left(\frac{x}{2y}\right)^4 = \frac{2^3 . (x^2)^3}{3^3 (y^3)^3} \cdot \frac{(y^2)^2}{(x^3)^2} \cdot \frac{x^4}{2^4 . y^4}$$

$$= \frac{8x^6 . y^4 . x^4}{27y^9 . x^6 . 16y^4}$$

$$= \frac{8x^{10} y^4}{27 . 16 . x^6 y^{13}}$$

$$= \left(\frac{8}{27.16}\right) \frac{x^{10}}{x^6} \cdot \frac{y^4}{y^{13}}$$

$$= \frac{1}{54} . x^4 . \frac{1}{y^9}$$

$$= \frac{x^4}{54y^9}$$

يمكن تعميم استعمال الأسس لتشمل الصفر والأعداد الصحيحة السالبة بطريقة يمكننا فيها تطبيق قوانين الأسس(2) الى(6) . افرض ان$x \neq 0$ ، اذا وضعنا$m = 0$ في (2) لحصلنا على

$$x^0 . x^n = x^{0+n} = x^n$$

المعادلة الأخيرة تكون صحيحة اذا عرّفنا$x^0 = 1$. يمكن اثبات ان قوانين الأسس الأخرى صحيحة اذا عرّفنا

$$x^0 = 1$$

وعليه فان

$$(3)^0 = 1, \left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1,$$

وهكذا .

ولا بد ان نلاحظ ان 0^0 (صفر مرفوع للأس صفر) غير معرف .

لننتقل الآن الى الأسس السالبة . افرض ان $m = -n$ في (2) فيكون عندنا

$$x^{-n} . x^{n} = x^{-n+n} = x^{0} = 1$$

بقسمة الطرفين على x^n نحصل على

$$x^{-n} = \frac{1}{x^{n}}$$

فمثلاً

$$2^{-3} = \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8}$$

$$(xy)^{-4} = \frac{1}{(xy)^{4}} = \frac{1}{x^{4} y^{4}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}} = \frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{1.27}{\frac{8}{27}.27} = \frac{27}{8}$$

نقدم الآن التعريف الآتي .

تعريف ٨ :

اذا كان x عدداً حقيقياً لا يساوي صفراً وكان n عدداً صحيحاً موجباً ، نُعرّف

$$x^{0} = 1$$

و

$$x^{-n} = \frac{1}{x^{n}}$$

يمكننا الآن تطبيق قوانين الأسس عندما تكون الأسس اعداداً صحيحة (موجبة ، صفر ، سالبة) .

مثال «٢» :

احذف الأسس السالبة ثم بسط

(a) $(x^{-2}y^{3})^{-3}$ (b) $\dfrac{4xy^{-2}}{3x^{-3}y^{4}}$

الحل :

$$\text{(a)}\ (x^{-2}y^{3})^{-3} = (x^{-2})^{-3}(y^{3})^{-3} = x^{6}.y^{-9} = \frac{x^{6}}{y^{9}}$$

$$\text{(b)}\ \frac{4xy^{-2}}{3x^{-3}y^{4}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{1}}{x^{-3}}\cdot\frac{y^{-2}}{y^{4}}$$

$$= \frac{4}{3}.x^{1}(x^{+3}).(y^{-4})$$

$$= \frac{4}{3}x^{4}y^{-6}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{4}}{y^{6}} = \frac{4x^{4}}{3y^{6}}$$

حل آخر لـ(b) :- بضرب كل من البسط والمقام في $x^{3}y^{2}$ نحصل على

$$\frac{4xy^{-2}}{3x^{-3}y^{9}} = \frac{4xy^{-2}x^{3}y^{2}}{3x^{-3}y^{4}x^{3}y^{2}}$$

$$= \frac{4x^{4}y^{6}}{3x^{0}y^{6}}$$

$$= \frac{4x^{4}}{3y^{6}}$$

مثال (٣) :

بسط ما يأتي :

$$\frac{1}{1+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{b-a}}$$

الحل :

$$\frac{1}{1+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{b-a}} = \frac{1}{1+\frac{x^{a}}{x^{b}}} + \frac{1}{1+\frac{x^{b}}{x^{a}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x^{b}+x^{a}}{x^{b}}} + \frac{1}{\frac{x^{a}+x^{b}}{x^{a}}} = \frac{x^{b}}{x^{b}+x^{a}} + \frac{x^{a}}{x^{a}+x^{b}}$$

$$= \frac{x^b + x^a}{x^a + x^b}$$

$$= 1.$$

تمارين (٣) :

في التمارين من 1 الى 30 بسط التعبيرات حيث P,n,m هي اعداد صحيحة موجبة .

1. $(2)^3$

2. $(4)^2 . (2)^4$

3. $a^3 . a^5$

4. $\frac{a^5}{a^2}$

5. $(\frac{2}{3})^4$

6. $(-\frac{3}{4})^3$

7. $x^3 x^4 x^5$

8. $aa^3(-a)^5$

9. $(x^2 y^2)^5$

10. $-5(-3x^2 y^3)(-2x^5 y^3)$

11. $\frac{(x^4 y^3)(xy^4)}{x^3 y^6}$

12. $\frac{8^m . 16^n}{4^{m+n}}$

13. $3^0 . 9^4 . (8)^{-2}$

14. $(a^{-2} b^{-3})^{-1}$

15. $(x^2 y^3)(-xy^2)^{-2}$

16. $(\frac{2}{5})^{-2}$

17. $x^{-1} y^{-1}$

18. $(x+y)^{-1}(x+y)$

19. $(\frac{2x^3}{3y^2})^2 (\frac{y}{x})^3 (\frac{2x^2}{y^3})^2$

20. $(x^{2n-1})^2 (x^{n-1})^{2n}$

21. $\frac{4^5 . (64)^3 . 2^4}{8^6 . (128)^2}$

22. $\frac{3 . (3^n)}{(3^n)^{n-1}} \div \frac{9^{n+1}}{(3^{n-1})^{n+1}}$

23. $\frac{8^{1+n} . 2^{n+5} . 2^5 . (4)^{2n}}{2^{4n+8} . (16)^{n+1}}$

24. $\frac{9^n . 3^2 . (3^{-n})^{-1} . (27)^n}{(3)^{6n+2}}$

25. $(\frac{x^m}{x^n})^{m+n} (\frac{x^n}{x^p})^{n+p} (\frac{x^p}{x^m})^{P+m}$

26. $(2)^{-1} + (\frac{2}{3})^{-1}$

27. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$

28. $\dfrac{x^{-2}y^{-2}}{x^{-2}+y^{-2}}$

29. $\dfrac{1}{1+x^{m-n}+X^{P-n}}+\dfrac{1}{1+x^{p-m}+x^{n-m}}+\dfrac{1}{1+x^{m-p}+x^{n-p}}$

30. $\dfrac{((2^3)^2)^2-((2^2)^3)^2}{(2^3)^3-((2)^5)^2}$

(٢ - ٤) الجذور والأسس الكسرية Radicals and Rational Exponents :

لنفرض أن n عدد طبيعي وان x عدد حقيقي . فأحد الجذور الـ n للعدد x هو أي عدد اذا رفع الى الأس n لنتج العدد x . أو بعبارة أخرى ، أن العدد الحقيقي y هو الجذر رقم n للعدد x اذا كان $y^n = x$. فمثلاً العددان $2 , 2 -$ هما جذران رابعان للعدد 16 وذلك لأن $(2)^4 = 16$، $(-2)^4 = 16$. والجذر التكعيبي للعدد $27 -$ هو $3 -$ وذلك لأن $(-3)^3 = -27$. وندرس بصورة عامة حالتين عند $x \neq 0$: الأولى عندما تكون n عدداً زوجياً والثانية عندما تكون n عدداً فردياً . ثم ندرس الحالة الثالثة عند $x = 0$.

الحالة الأولى :

نفرض الآن ان n عدد زوجي و $x \neq 0$. في هذه الحالة نجد ان $y^n = x$ تكون دائماً عدداً موجباً لأي عدد حقيقي y . لذلك لا يمكن أن يكون للعدد السالب x جذر حقيقي من الرتبة n عندما يكون n عدداً صحيحاً زوجياً . فمثلاً الجذر التربيعي $(n = 2)$ للعدد $1 -$ غير موجود في نظام الأعداد الحقيقية . اما اذا كان x عدداً موجباً فيمكن اثبات وجود عددين حقيقيين y و $y -$ بحيث

$$y^n = (-y)^n = x$$

وعليه نجد أن لكل عدد حقيقي موجب x جذرين من رتبة n في نظام الأعداد الحقيقية ، أحدهما موجب والآخر سالب . سوف نشير الى الجذر الموجب (ويسمى كذلك بالجذر الرئيس (principal Root) بالرمز $\sqrt[n]{x}$. مثلاً $\sqrt[4]{16} = 2$ ، وبالمثل $\sqrt[2]{9} = 3$ ولا يساوي $3 -$.

الحالة الثانية :

لنفرض أن n عدد فردي . في هذه الحالة يوجد لكل عدد حقيقي x جذر واحد فقط من الرتبة n يكون موجباً اذا كان x موجباً وسالباً اذا كان x سالباً . وفي كلتا الحالتين يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{x}$ مثلاً $\sqrt[3]{64} = 4$ و $\sqrt[5]{-32} = -2$

الحالة الثالثة :

$\sqrt[n]{x} = 0$ فقط عندما تكون $x = 0$ وذلك لأي عدد طبيعي n فمثلاً $\sqrt[7]{0} = 0$.

يسمى الرمز $\sqrt[n]{x}$ جذراً Radical ويسمى العدد x المجذور Radicand يسمى n الدليل index . عندما $n = 2$ نكتب عادة $\sqrt{2}$ بدلاً من $\sqrt[2]{2}$.

وتتضمن النظرية التالية قوانين الجذور الهامة :

نظرية «١» :

اذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكان كل من x , y عدداً حقيقياً بحيث أن $\sqrt[n]{x}$ و $\sqrt[n]{y}$ موجودان فان

(a) $(\sqrt[n]{x})^n = x$

(b) $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

(c) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\ , y \neq 0$

(d) $\sqrt[n]{x^n} = x$ اذا كان n عدداً فردياً و $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ اذا كان n عدداً زوجياً .

(e) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ اذا كان m عدداً صحيحاً موجباً والجذور كلها موجودة .

البرهان :

سوف نثبت القانون (b) ونترك برهنة القوانين الأخرى كتمارين للقارىء. لبرهان (b) نفرض أن

$$v = \sqrt[n]{y}, u = \sqrt[n]{x}$$

فنحصل على

$$v^n = y \ , \ u^n = x$$

اذا

$$u^n v^n = x\,y$$

$$(u\,v)^n = x\,y$$

أو أن

$$u\,v = \sqrt[n]{x\,y}$$

أو

$$\sqrt[n]{x}\;\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

يمكن تعميم هذه القوانين كما يلي :

$$\sqrt[n]{xyz} = \sqrt[n]{x}\;\sqrt[n]{y}\;\sqrt[n]{z}$$

وهكذا .

مثال «١» :

بسط ما يأتي :

(a) $\sqrt[3]{500}$ (b) $\sqrt[3]{27x^4}$ (c) $\sqrt{16a^2 b^3 c}$

الحل :

(a) $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{125 . 4} = \sqrt[3]{125} . \sqrt[3]{4} = 5 . \sqrt[3]{4}$

(b) $\sqrt[3]{27x^4} = \sqrt[3]{3^3 . x^3 x} = 3x\ \sqrt[3]{x}$

(c) $\sqrt{16a^2 b^3 c} = \sqrt{4^2 . a^2 . b^2 . b . c} = 4ab\sqrt{bc}$

مثال «٢» :

برهن ان

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

البرهان :

اذا كان $x \geqslant 0$ فان $\sqrt{x^2} = x = |x|$. افرض الآن ان $x < 0$ اذا $-x > 0$ وعليه فان

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$$

تسمى عملية ازالة الجذور من مقامات الكسور تنسيب المقام

مثال «٣» :

نسب المقامات :

(a) $\sqrt[3]{\frac{2x^4}{9y^5}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

الحل :

(a) نضرب البسط والمقام بعدد يجعل المقام مكعباً كاملاً . وهكذا

$$\sqrt[3]{\frac{2x^4}{9y^5}} = \sqrt[3]{\frac{2x^4 . 3y}{9y^5 . 3y}} = \sqrt[3]{\frac{6x^4y}{27y^6}} = \frac{x}{3y^2}\sqrt{6xy}$$

في الأمثلة من نمط(b) نضرب البسط والمقام في $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ فنحصل على

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

يمكن جمع وطرح المقادير الجبرية التي تحتوي جذوراً وذلك بضم الحدود المتشابهة كما هو موضح في المثال التالي .

مثال :

بسط بضم الحدود المتشابهة

(a) $\sqrt{75}+\sqrt{108}-\sqrt{192}$ (b) $\sqrt{4x^3y^3}+\sqrt{9x^5y^3}$

الحل :

(a) $\sqrt{75}+\sqrt{108}-\sqrt{192} = \sqrt{25(3)}+\sqrt{36(3)}-\sqrt{64(3)}$

$$= 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4x^3y^5} + \sqrt{9x^5y^3} = \sqrt{2^2x^2y^4xy} + \sqrt{3^2x^4y^2xy} \text{ (b)}$$

$$= 2xy^2\sqrt{xy} + 3x^2y\sqrt{xy}$$

$$= (2xy^2 + 3x^2y)\sqrt{xy}$$

$$= xy(2y + 3x)\sqrt{xy}$$

عرفنا في الجزء السابق x^n لكل عدد صحيح n. من الطبيعي ان تسأل ما اذا كان من الممكن تعريف x^n لكل عدد نسبي n. مثلا ، ما هو التعريف المعقول للمقدار $x^{1/3}$ بحيث لا يغير هذا التعريف في صحة قوانين الأسس ؟

نعلم من احدى قوانين الأسس

$$(x^{1/3})^3 = (x)^{\frac{1}{3}\cdot 3}$$

ونعلم أن

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x$$

فنستنتج أن تعريفا لـ $x^{\frac{1}{3}}$ هو $\sqrt[3]{x}$

وبصورة عامة اذا كان x عددا حقيقيا وكان n عددا صحيحا موجبا واذا كان $\sqrt[n]{x}$ موجودا فنعرف

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

أما الآن وقد عرّفنا $x^{\frac{1}{n}}$ ، لنحاول تعريف $x^{\frac{m}{n}}$ حيث كل من m و n عدد صحيح موجب . اعتبر الحالة الخاصة $(64)^{\frac{2}{3}}$. اذا صحت قوانين الأسس فيجب ان يكون

$$(64)^{\frac{2}{3}} = [(64)^{\frac{1}{3}}]^2 = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16$$

اليك الآن التعريف التالي :

تعريف ٩ :

لكل زوج من الأعداد الصحيحة n,m و n> 1 ولكل عدد حقيقي x يكون فيه $\sqrt[n]{x}$ عدداً حقيقياً ، نعرف

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$$

وبهذا التعريف يمكن اثبات أن جميع قوانين الأسس صحيحة للأسس التي هي أعداد نسبية .

مثال " ٥ " :

بسّط

(a) $x^{\frac{1}{2}} .(x^3)^{\frac{1}{6}}$ (b) $\left(\frac{-27x^6y^3}{Z^{24}}\right)^{\frac{-1}{3}}$

الحل :

$$\text{(a)}\quad x^{\frac{1}{2}}(x^3)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} . x^{3(\frac{1}{6})} = x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x' = x$$

$$\text{(b)}\quad \left(\frac{-27x^{-6}y^3}{Z^{24}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{(-27)^{-\frac{1}{3}}(x^{-6})^{-\frac{1}{3}}(y^3)^{-\frac{1}{3}}}{(Z^{24})^{-\frac{1}{3}}} =$$

$$\frac{[(-3)^3]^{\frac{1}{3}}\ x^2y^{-1}}{Z^{-8}} = \frac{(-3)^{-1}\ x^2y^{-1}}{Z^{-8}}$$

تمارين (٤) :

في التمارين من 1 الى 30. بسط التعبيرات . كل المتغيرات تمثل أعداداٍ موجبة .

1. $\sqrt{64}$

2. $\sqrt[3]{125}$

3. $\sqrt[5]{-32}$

4. $\sqrt{300}$

5. $\sqrt[3]{8x^6y^{-3}}$

6. $\sqrt[3]{-27x^4y^3}$

7. $(\sqrt[5]{-2xy})^5$

8. $\sqrt{6}\sqrt{24}$

9. $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}$

10. $(\sqrt[3]{x})^6$

11. $\sqrt[3]{(-x)^2}$

12. $\sqrt{2x^3y}\ \sqrt{6xy^{-3}}$

13. $\sqrt[4]{x^3}\,\sqrt[4]{x^5}$

14. $\sqrt{3x}\sqrt{12xy}$

15. $\sqrt[3]{-2x^2y^4}\,\sqrt[3]{4x^5y^2}$

16. $\sqrt{x}\sqrt{x^2y}\sqrt{xy^3}$

17. $\dfrac{\sqrt[3]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{x^2y}}$

18. $\sqrt{\sqrt[3]{x^6y}}$

19. $x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{2}}$

20. $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\ x^{\frac{-1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

21. $(4x^{\frac{3}{2}})\ (3x^{\frac{1}{2}})$

22. $x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{4}}$

23. $x^{\frac{1}{3}}\ (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{-1}{3}})$

24. $(x^{\frac{-1}{2}})^{-4}$

25. $x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}})$

26. $(8x^{-6}y^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$

27. $\left(\dfrac{8x^4y^3}{27x^{-2}y^6}\right)^{\frac{1}{3}}$

28. $\sqrt[3]{x^4\sqrt{x^3}}$

29. $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\ x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

30. $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}\sqrt{x^{-3}}\quad\sqrt{x^2}$

في التمارين من 31 الى 36 أوجد الناتج . افترض أن جميع المتغيرات هي أعداد حقيقية موجبة .

31. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

32. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

33. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

34. $(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})$

35. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

36. $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$

في التمارين من 37 الى 47 بسط المقام ، افترض أن جميع المتغيرات هي أعداد حقيقية موجبة .

37. $\sqrt{\frac{1}{x}}$ 38. $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$ 39. $\sqrt[4]{\frac{3x^4y}{2x^3y^2}}$

40. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 41. $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ 42. $\frac{1}{\sqrt{5-2}}$

43. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 44. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 45. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

46. $\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}$ 47. $\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

في التمارين من 48 الى 57 بسط ما يأتي مفترضا أن جميع المتغيرات هي أعداد حقيقية موجبة

48. $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

49. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$

50. $6\sqrt{3}-8\sqrt{12}+2\sqrt{75}$

51. $\sqrt{x^3}+3x\sqrt{x}$

52. $\sqrt{4xy}+\sqrt{9x^3y^5}$

53. $\sqrt{xy}+\sqrt{x^3y^2}+\sqrt{x^5y^5}$

54. $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}$

55. $\frac{(3-\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})}{5+\sqrt{7}}$

56. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$

57. $\sqrt[3]{27x^3}\ \sqrt{64x^2}-\sqrt[3]{x^2}-y\sqrt{x^2}$

(٢ - ٥) كثيرات الحدود Polynomials

اذا كان x يرمز لأي عنصر من عناصر الفئة A (التي تحتوي على أكثر من عنصر) فان x يسمى متغيرا ، وتسمى الفئة A بنطاق Domain x. أما اذا احتوت A على عنصر واحد فقط فان x تعتبر ثابتا . وسوف نفترض أن x تمثل أعدادا حقيقية ما لم يذكر خلاف ذلك .

افرض أننا نبدأ بمجموعة من المتغيرات (عادة تمثل بـ z, y, x وحروف مماثلة) والأعداد الحقيقية ونستخدم عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والجذور مرات محدودة . يسمى المقدار الناتج تعبيرا جبريا Algebraic Expression .

أمثلة على التعابير الجبرية هي

$$5,\ 3x + 5,\quad \frac{2x - y}{5x^2 + 6x - 9},\ xy^2 + 5xyz$$

اذا استبدلنا المتغيرات في التعبير الجبري بقيم معينة فيسمى العدد الحقيقي الناتج بقيمة التعبير الجبري لهذه القيم .

مثال« ١ » :

اذا كان $x = 2$، $y = 3$ ، $z = -4$ ، أوجد قيمة كل من التعابير الجبرية التالية

(a) $3x^2 + 2xyz$ (b) $\dfrac{x^2 + yz - z^2}{2x + 3y}$

الحل :

(a)
$$3x^2 + 2xyz = 3(2)^2 + 2(2)(3)(-4)$$
$$= 12 - 48$$
$$= -36$$

(b)
$$\frac{x^2 + yz - z^2}{2x + 3y} = \frac{(2)^2 + (3)(-4) - (-4)^2}{2(2) + 3(3)}$$
$$= \frac{4 - 12 - 16}{4 + 9} \qquad = -\frac{24}{13}$$

سوف ندرس أولا نوعا خاصا من التعابير الجبرية يسمى كثيرات الحدود.
Polynomial كثير الحدود في متغير واحد مثل x هو تعبير جبري يشكل من الأعداد الحقيقية و x باستخدام عدد محدود من عمليات الجمع والطرح والضرب . مثلا :

$$p_1 = 5x^3 + 3x^2 - 2x,\quad p_2 = 2x^2 - 7x - 8,\quad p_3 = 3x + 4$$

كلها كثيرات حدود في x . تسمى اجزاء كثيرات الحدود المحصورة بين اشارات الجمع او الطرح بالحدود . في الأمثلة السابقة تحتوي p_1 على حدين ، p_2 و p_3 على ثلاثة حدود . افرض ان لدينا كثير حدود ذا حد واحد فقط ويتكون من عاملين . يسمى كل عامل معاملا للعامل الآخر . العامل الثابت يسمى عاملا عددياً . ويسمى العامل غير الثابت بالعامل الحرفي . مثلا في الحد $7x\ yz$ و 7 عامل عددي ويسمى المعامل العددي لـ $7x, xyz$ يسمى بالعامل الحرفي وهو المعامل الحرفي لـ yz . بدرجة كثير الحدود هي اعلى أس للمتغير في جميع الحدود . مثلا درجة $3x$ هي 1 ، درجة $5x^2 - 3x + 7$ هي 2 ، ودرجة $4y^3 - 6y^2 + 3$ هي 3 . أي عدد حقيقي يختلف عن الصفر (مثل 5) يسمى كثير حدود ثابت ودرجته صفر . اما العدد الحقيقي صفر فليس له درجة ، ويسمى كثير الحدود الصفري . يمكن تعميم مفهوم كثيرات الحدود الى متغيرات متعددة . مثلا $3x^2y + 5x + 7$ هو كثير حدود في متغيرين و

$$3x^2y^2z^2 + 5xz + 4y^2z^3$$

هو كثير حدود في ثلاثة متغيرات . درجة كثير الحدود في عدة متغيرات هي أكبر مجموع أسس في أي من حدود كثير الحدود كما هو موضح في المثال التالي .

مثال " ٢ " :

في كل من كثيرات الحدود التالية ، أذكر الدرجة في كل متغير وكذلك درجة كثير الحدود

(b) $xy^2 - 5x^3y^2z^3 + 7$

(a) $3x^2y + 5xy^3 + 7z^2$

الحل :

(a) كثير الحدود هذا من الدرجة 2 في x ، 3 في y ، 2 في z ودرجة كثير الحدود هي 4.

(b) كثير الحدود هذا من الدرجة 3 في x ، 2 في y ، 3 في z ودرجة كثير الحدود هي 8

بما أن كثيرات الحدود تمثل أعدادا حقيقية فجميع خواص الاعداد الحقيقية من جمع وطرح وضرب وقسمة يمكن تطبيقها على كثيرات الحدود . نفرض أنه قد طلب منا جمع كثيري الحدود

$$(2x^2 + 8x + 7) + (5x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$$

يمكن تطبيق قانوني التبديل والترابط لكتابة المجموع بشكل

$$(2x^3 + 5x^2 + 8x + 7) + (5x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$$

$$= (2x^3 + 5x^3) + (5x^2 + 2x^2) + (8x + 3x) + (7 + 4)$$

يمكن الآن تطبيق قانون التوزيع لتبسيط الجهة اليمنى .

$$= (2 + 5)x^3 + (5 + 2)x^2 + (8 + 3)x + 11$$

$$= 7x^3 + 7x^2 + 11x + 11$$

يمكن اعادة ترتيب هذا الحل بطريقة عمودية وذلك بكتابة الحدود المتشابهة في عمود واحد وذلك كما هو مبين أدناه

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 8x + 7 \\ +\ 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\ \hline 7x^3 + 7x^2 + 11x + 11 \end{array}$$

يمكن اجراء عملية الطرح بطريقة مماثلة .

مثـال «٣» :

اطرح $3x^2 - 5x - 2$ من $7x^2 + 8x - 3$

الحل :

$$(7x^2 + 8x - 3) - (3x^2 - 5x - 2) = (7x^2 + 8x - 3) + (-3x^2 + 5x + 2)$$
$$= (7 - 3)x^2 + (8 + 5)x + (-3 + 2)$$
$$= 4x^2 + 13x - 1$$

وبالطريقة العمودية يكون الحل كما يلي :

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 8x - 3 \\ -(3x^2 - 5x - 2) \\ \hline 4x^2 + 13x - 1 \end{array}$$

لايجاد حاصل ضرب كثيري حدود تستخدم قوانين التوزيع وقوانين الأسس ثم تضم الحدود .

مثال« ٤ » :

أوجد حاصل ضرب

$3x^3 - 2x^2 + 4$ و $2x^2 + 3x + 1$

الحل :

$$(2x^2 + 3x + 1)(3x^3 - 2x^2 + 4)$$

$$= (2x^2 + 3x + 1)(3x^3) + (2x^2 + 3x + 1)(-2x^2) + (2x^2 + 3x + 1)(4)$$

$$= 6x^5 + 9x^4 + 3x^3 + (-4x^4 - 6x^3 - 2x^2) + (8x^2 + 12x + 4)$$

$$= 6x^5 + (9 - 4)x^4 + (3 - 6)x^3 + (-2 + 8)x^2 + 12x + 4$$

$$= 6x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 12x + 4$$

وبالنظام العمودي نكتب

$$
\begin{array}{l}
2x^2 + 3x + 1 \\
\underline{3x^3 - 2x^2 + 4} \\
6x^5 + 9x^4 + 3x^3 \qquad = (2x^2 + 3x + 1)(3x^3) \\
\quad - 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 \qquad = (2x^2 + 3x + 1)(-2x^2) \\
\qquad\qquad + 8x^2 + 12x + 4 \qquad = (2x^2 + 3x + 1)(4) \\
\hline
6x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 12x + 4
\end{array}
$$

مثـال« ٥ » :

استخدم النظام الرأسي في ضرب

$x^2 - xy + y^2$ و $x + y$

الحل :

$$
\begin{array}{l}
x^2 - xy + y^2 \\
x + y \\
\hline
x^3 - x^2 y + xy^2 \\
\quad + x^2y - xy^2 + y^3 \\
\hline
x^3 \qquad\qquad + y^3
\end{array}
$$

نحن الآن نستعرض بعض النتائج الخاصة التي ستتكرر كثيرا في الجبر . القارئ يجب عليه التأكد (بالضرب الفعلى) من صحة كل صيغة .

3I) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(II) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(III) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

(IV) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(V) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

(VI) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

(VII) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

(VIII) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(IX) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

مثــال« ٦ » :

استخــدمالنتائج التسع الخاصة المذكورة في ايجاد النتائج التالية :

$(2a + 3b)^3$ (3) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (2) $(2a - 3b)^2$ (1)

الحل :

(1) باستخدام النتيجة الخاصة (II) بوضع $x = 2a$ ، $y = 3b$ سنحصل على

$$(2a - 3b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2$$

$$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

(2) سنستخدم (III) بوضع $x = \sqrt{a}$ ، $y = \sqrt{b}$ وبذلك

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$

$$= a - b$$

(3) سنستخدم (IV) بوضع $x = 2a$ ، $y = 3b$ وبذلك

$$(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 + (3b)^3$$

$$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$$

تمارين (٥) :

في التمارين من 1 الى 8 عبر عن كل كثير حدود على صورة احادى الحدود أو ثنائي الحدود أو ثلاثي الحدود أو غير ذلك ثم قدر درجة كل متغير من المتغيرات ودرجة كثير الحدود .

1. $2x^2 - 6x + 5$
2. $4x^4 + 1$
3. $3x^3y^2 + 5$
4. $3uv - u^3 + uv^2$
5. $3x^3 - 5x^2 + 7$
6. $4xyz$
7. -4
8. 0

في التمارين من 9 الى 12 أوجد قيمة كل تعبير عند $x = 2$ ، $y = -3$

9. $2x^2y - y^3$

10. $(x + 3y)(x - 3y)$

11. $\frac{5xy + y^2}{3x + y}$

12. $\frac{3x^2 + 4xy + y^2}{3x + y^2}$

في التمارين من 13 الى 29 نفذ العمليات الحسابية الموضحة .

13. $(4x^2 - 3x) + (3x^2 - 2x)$

14. $(x^2 - 2x + 3) + (-3x^2 + 2x - 7)$

15. $(5x^2 + 7x - 3) - (3x^2 - 4x + 2)$

16. $(x^4 + 2x^2 - 3) + (x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$

17. $(x^3 + 3 - 2x^2) - (2x^3 - x^2 + 4)$

18. $(1 - x + x^2 - x^5) - (-x^3 + 3x^2 + 4)$

19. $(3x^2y - 5xy^2 + 2xy) - (3xy^2 - 6x^2y - 6x^2y - xy)$

20. $(x + y)\,3x^2y$

21. $(x + y)(2x - y)$

22. $(x - 7)(x + 7)$

23. $(2xy + xy^2 + 1)(x - y)$

24. $(x + y - xy^2)(x - y + xy^2)$

25. $(x^3 + 2x^2 + 1) - (3x^3 - 4x - 2) + (4x^2 - 7)$

26. $3(x^2 - 2x + 1) - 4x(2x^2 + 3) + 4x^2(3x + 7)$

27. $(x + y)(3x - 2y) - (3x - y)(2x + 5y)$

28. $(2x + 1)(x - 1)^2$

29. $(x - 2)(x^2 - 2x + 1)(x + 2)$

في التمارين من 30 الى 43 استخدم القوانين لايجاد النتائج الموضحة .

30. $(3x - 2y)^2$

31. $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)^2$

32. $(5x + 2y)(5x - 2y)$

33. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$

34. $(2x - y)^3$

35. $(3x + 2y)^3$

36. $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

37. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

38. $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3$

39. $(x + y + z)^2$

40. $(3\sqrt{x} + 2y^2)(3\sqrt{x} - 2y^2)$

41. $(x + y + z)(x - y - z)$

42. $(x + y - z)(x - y + z)$

43. $(x + y + z)^3$

(٢ ـ ٦) التحليل Factoring :

نذكر بأننا لو ضربنا عددين a و b فيسمى a ، b عوامل حاصل الضرب ab . مثلاً 2 ، 5 هما عاملا العدد 10 . يسمى العدد الصحيح P عدداً أولياً Prime number اذا لم يكن العدد p أي عامل موجب سوى العدد p والعدد 1 . بعض الأعداد الأولية الأولى هي :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

ويسمى أي عدد موجب صحيح عدداً مركباً اذا لم يكن ذلك العدد عدداً أولياً . بعض الأعداد المركبة الأولى هي

$$4, 6, 8, 9, 10, \ldots$$

تحليل (ايجاد العوامل الأولية) أي عدد يعني كتابة العدد كحاصل ضرب أعداد أولية او قوى لأعداد اولية . مثلا تحليل 60 هو

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

ومفهوم التحليل في كثيرات الحدود مماثل لتحليل الأعداد الصحيحة . اذا كتب كثير حدود كحاصل ضرب كثيرات حدود فيسمى كل كثير حدود في حاصل الضرب عاملا من عوامل كثير الحدود الأصلي . عملية التعبير عن كثير الحدود كحاصل ضرب كثيرات حدود تسمى عملية تحليل كثير الحدود . مثلا، بما أن $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ فيكون لدينا $x - 2, x + 2$ عوامل $x^2 - 4$.

في المناقشة التالية سوف نفترض انه اذا طلب تحليل كثير حدود معاملاته أعداد صحيحة فكل عامل يجب ان يكون كثير حدود معاملاته أعداد صحيحة ايضاً .

ونتيجة لهذه الفرضية وبالرغم من امكانية كتابة كثير الحدود $x^2 - 2$ بشكل $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ ، سوف نقول انه لا يمكن تحليل المقدار $x^2 - 2$ في نظام الأعداد الصحيحة. تسمى كثيرات الحدود من هذا النمط أولية أو غير قابلة للتحليل. نقدم الآن التعريف التالي:

تعريف :

يسمى كثير الحدود الذي معاملاته أعداد صحيحة أولياً أو غير قابل للتحليل اذا لم يكن بالامكان كتابته كحاصل ضرب كثيري حدود معاملاتها أعداد صحيحة . لتحليل كثير حدود معناه التعبير عنه كحاصل ضرب كثيرات حدود أولية او قوى لكثيرات حدود أولية .

ليست هناك طريقة بسيطة لتحليل كثير حدود ذي درجة عالية . في بعض الحالات يمكن التوصل الى قوانين لتحليل كثير الحدود وذلك اذا قرأنا حواصل الضرب الخاصة الموجودة في الفصل السابق من اليمين كما يتضح مما يلي :

$$\text{(I)}\ x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$\text{(II)}\ x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

مثال « ١ » :

حلل كثيرات الحدود التالية :

(a) $a^4 + 6a^2 + 9$ (b) $4a^4 - 20a^2b^2 + 25b^4$

الحل :

(a) باستخدام (I) بوضع $x = a^2$ ، $y = 3$

$$a^4 + 6a^2 + 9 = (a^2)^2 + 2(a^2)(3) + (3)^2 = (a^2 + 3)^2$$

(b) باستخدام (II) بوضع $x = 2a^2$ ، $y = 5b^2$

$$4a^4 - 20a^2b^2 + 25b^4 = (2a^2)^2 - 2(2a^2)(5b^2) + (5b^2)^2$$

$$= (2a^2 - 5b^2)$$

الصيغة

$$\text{(III)}\quad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

هي واحدة من اهم الصيغ وتسمى صيغة الفرق بين مربعين .

مثال « ٢ » :

حلل التعبيرات الآتية :

(a) $4a^2 - 9b^2$ (b) $16a^4 - 1$

(c) $(u - v)^2 - (a + b)^2$. (d) $a^4 + 4$

الحل :

(a) من الصيغة (III) بوضع $x = 2a$ ، $y = 3b$

$$4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$$

(b) من الصيغة (III) بوضع $x = 4a^2$ ، $y = 1$

$$16a^4 - 1 = (4a^2)^2 - (1)^2 = (4a^2 + 1)(4a^2 - 1)$$

باستخدام الصيغة (III) نحصل على

$$4a^2 - 1 = (2a)^2 - (1)^2 = (2a + 1)(2a - 1)$$

اذا

$$16a^4 - 1 = (4a^2 + 1)(2a + 1)(2a - 1)$$

(c) من الصيغة (III) بوضع $x = u - v$ ، $y = a + b$

$$(u - v)^2 - (a + b)^2 = [\,(u - v) + (a + b)\,]\,[\,(u - v) - (a + b)\,]$$

$$= (u - v + a + b)(u - v - a - b)$$

(d) بالرغم من أن $a^4 + 4$ غير معطاة في صيغة الفرق بين مربعين يمكننا تحويلها الى هذه الصيغة ، حيث

$$(a^2 + 2)^2 = a^4 + 4a^2 + 4$$

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2$$

سنحصل على

$$a^4 + 4 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2$$

$$(a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$$

$$(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$$

الطريقة في مثال ٢ (d) تسمى طريقة اكمال المربع . الصيغ

$$(IV)\ x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$(V)\ x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

تسمى صيغ مجموع مكعبين والفروق بين مكعبين على التوالي .

مثال « ٣ » :

حلل التعبيرات التالية :

$a^6 - b^6$ (c) $a^3 - 64b^3$ (b) $8a^3 + 27b^3$ (a)

الحل :

(a) باستخدام(IV) بوضع $x = 2a$ ، $y = 3b$

$$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3$$

$$= (2a + 3b)\left[(2a)^2 - (2a)(3b) + (3b)^2\right]$$

$$= (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$$

(b) من(V) بوضع $x = a$ ، $y = 4b$

$$a^3 - 64b^3 = (a)^3 - (4b)^3$$

$$a^3 - 64b^3 = (a)^3 - (4b)^3$$

$$= (a - 4b)\left[a^2 + a(4b) + (4b)^2\right]$$

$$= (a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)$$

(c) نستخدم أولا صيغة الفرق بين مربعين

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2$$
$$= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$$

الآن باستخدام (IV) ، (V) سنحصل على

$$(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

لو اعطينا كثير الحدود $ax^2 + bx + c$ حيث c,b,a اعداد صحيحة ، واذا كان كثير الحدود هذا قابلاً للتحليل ، فتحليله يجب ان يكون على شكل

$$(dx + e)(fx + g) = dfx^2 + (dg + ef)x + eg$$

حيث d,e,f,g أعداد صحيحة ، ويجب ان يكون $df = a$ ، $eg = c$ و $dg + df = b$. بتجربة امكانيات مختلفة (هناك عدد محدود منها فقط) تصل الى التحليل المطلوب للمقدار $ax^2 + bx + c$.

مثال « ٤ » :

حلل كلا من كثيرات الحدود التالية

(a) $x^2 - 6x + 8$ (b) $2x^2 + 7x + 6$ (c) $6x^2 - xy - 2y^2$

الحل :

(a) اذا كتبنا

$$x^2 - 6x + 8 = (dx + e)(fx + g)$$

فنحصل على $df = 1$ و $eg = 8$. محاولة مختلف الامكانيات توصلنا الى التحليل

$$(x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8$$

(b) اذا كان $(dx + e)(fx + g) = 2x^2 + 7x + 6$ فان $df = 2$ و $eg = 6$.

افرض ان $d = 1$ و $f = 2$ فتكون العوامل كالآتي : $(x)\,(2x)$ لايجاد g,e (حاصل ضرب $eg = 6$) عندنا الامكانيات الآتية :

$e = 1,\ g = 6$ ، $e = -1,\ g = -6$ ، $e = 2,\ g = 3$ ، $e = -2,\ g = -3$ ،

$e = 3,\ g = 2$ ، $e = -3,\ g = -2$ ، $e = 6,\ g = 1$ ، $e = -6,\ g = -1$

بمحاولة هذه الامكانيات نجد ان $e = 2$ و $g = 3$ هي الامكانية الوحيدة التي تعطى الحد الأوسط $7x$. وعليه فان

$$2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$$

(c) اذا كان هناك تحليل الى عاملين من الدرجة الأولى فيجب ان يكون بشكل $(dx + e)(fx + g)$. بعد محاولة عدة امكانيات نحصل على

$$6x^2 - xy - 2y^2 = (2x + y)(3x - 2y)$$

يمكن احيانا ضم بعض الحدود بطريقة يمكن منها تحليل المقدار باستخدام قانون التوزيع كما هو موضح في المثال التالي .

مثال (٥) :

حلل كلا مما يأتي :

(a) $x(x + 2y) + 3y(x + 2y)$ (b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

الحل :

(a) باستخدام قانون التوزيع $a.c + b.c = (a + b).c$ حيث $a = x$ و $b = 3y$ و $c = x + 2y$ نحصل على تحليل المقدار

$$x(x + 2y) + 3y(x + 2y) = (x + 3y)(x + 2y)$$

(b) بضم الحدين الأول والثاني سويا ، الحدين الثالث والرابع سويا نحصل على

$$
\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x^3 + 2x^2) - (x + 2) \\
&= x^2 (x + 2) - (x + 2) \\
&= (x^2 - 1)(x + 2) \\
&= (x - 1)(x + 1)(x + 2)
\end{aligned}
$$

تمارين (٦) :

في المسائل التالية حلل كل كثير حدود (لو أمكن) .

1. $2xy + 4x$
2. $xy^2 - xy$
3. $3a^2 b^3 - 4a^3 b^2$
4. $2xyz - 5xy + 2xz$
5. $x(x + y) + 2(x + y)$
6. $2x(x - y) + (x - y)$
7. $x^2 - 49y^2$
8. $4x^2 - 25y^2$
9. $(x^2 - y^2) - (x + y)$
10. $(3x + 1)^2 - (2x + 3)^2$
11. $x^3 - 125y^3$
12. $1 - a^2 x^2$
13. $x^2 - 3x + 2$
14. $x^2 + x - 6$
15. $x^2 + 2x - 8$
16. $x^2 - 5x + 4$
17. $x^2 - 3x - 10$
18. $x^2 + 6x + 8$
19. $x^2 + 6x - 8$
20. $x^2 + 11x + 24$
21. $-x^2 - x + 12$
22. $2x^2 + 7x + 3$
23. $6x^2 + 7x + 2$
24. $2x^2 + 9x - 5$
25. $-3x^2 + 16x - 5$
26. $x^3 - 8x^2 + 7x$
27. $2x^3 - 4x^2 - 30x$
28. $x^4 - 1$
29. $x^6 - 1$
30. $x^8 - y^8$
31. $64a^2 - (a^2 + 2a + 1)$
32. $(3x - 1)^2 - 81u^2$
33. $(x + y)^3 - 1$
34. $(a - 2b)^3 - 27b^3$
35. $x^4 + x^2 + 1$
36. $x^4 + x^2 y^2 + y^4$
37. $9x^4 + 8x^{\cdot}\quad{}^{2} + 4y^4$
38. $x^4 - 6x^2 y^2 + 25y^4$
39. $x^4 + 64$
40. $x^4 + 1$

(٢ - ٧) المقادير النسبية Rational Expressions :

يسمى خارج قسمة كثيري حدود مقداراً نسبياً . من أمثلة المقادير النسبية هي

$$\frac{2x+5}{x^2+3x+4} \quad , \quad \frac{3xy+4z}{4x^2y+5} \quad , \quad \frac{1}{x}$$

قواعد دمج الكسور النسبية هي نفس قواعد دمج الكسور النسبية في الحساب . في معاملتنا للمقادير النسبية سوف نفترض دائماً أن مقاماتها تختلف عن الصفر. لندرس أولاً ضرب وقسمة المقادير النسبية . قواعد ضرب وقسمة كسرين هما ما يلي :

الضرب :

لضرب كسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نضرب البسطين والمقامين

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

مثال «١» :

أوجد

$$\frac{2x+y}{2x^2+1} \cdot \frac{x^2}{x+y}$$

الحل :

$$\frac{2x+y}{2x^2+1} \cdot \frac{x^2}{x+y} = \frac{(2x+y)\,x^2}{(2x^2+1)\,(x+y)} = \frac{2x^3+x^2y}{2x^3+2x^2y+x+y}$$

القسمة :

لقسمة الكسر $\frac{a}{b}$ على $\frac{c}{d}$ نضرب الكسر الأول $\frac{a}{b}$ في مقلوب الكسر الثاني $\frac{c}{d}$. مقلوب $\frac{c}{d}$ هو $\frac{d}{c}$ (نحصل عليه بقلب $\frac{c}{d}$) . وعليه

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال «٢» :

إقسم $\frac{x+1}{x-1}$ على $\frac{2x+3}{x+2}$

الحل :

$$\frac{x+1}{x-1} \div \frac{2x+3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+2}{2x+3}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$= \frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-3}$$

اذا كان $c \neq 0$ فان الكسر $\frac{a}{b}$ يساوي $\frac{ac}{bc}$ ، وذلك لأن

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

ويقال أن الكسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{ac}{bc}$ متكافئان . وهكذا عندما نريد تبسيط مقادير نسبية ، باستطاعتنا استخدام هذه الطريقة في اختصار العامل c . نوضح هذه الطريقة في المثال التالي .

مثال «٣» :

بسط $\frac{x^2-6x+8}{x^2+x-6}$

الحل :

$$\frac{x^2-6x+8}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x-4}{x+3}$$

كما ذكرنا سابقاً ، نفرض هنا ان $x-2 \neq 0, x+3 \neq 0$

مثال «٤» :

بسـط

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \div \frac{x - 2}{x^2 - x}$$

الحل :

نحلل أولاً كل كثير حدود ثم نحول عملية القسمة الى عملية ضرب

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \div \frac{x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \div \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x+1)}{(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)\,x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = x$$

الجمع والطرح :

لجمع أو طرح تعبيرين نسبيين لهما نفس المقام (المقام $\neq$ صفر) نجمع أو نطرح البسطين ثم نكتب نفس المقام المشترك .

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

مثال « ٥ » :

احسب ما يأتي بتكوين كسر اعتيادي واحد

(a) $\frac{3x^3 - y}{2x^2 + y} + \frac{x^2 + y}{2x^2 + y}$ (b) $\frac{2x^2 + 4}{x - 3} - \frac{x^2 - 2}{x - 3}$

(c) $\frac{3x^2 + 5}{x - 4} + \frac{x^2 - 1}{4 - x}$

الحل :

(a)
$$\frac{x^2+y}{2x^2+y}+\frac{3x^3-y}{2x^2+y}=\frac{(x^2+y)+(3x^3-y)}{2x^2+y}$$
$$=\frac{x^2+y+3x^3-y}{2x^2+y}$$
$$=\frac{3x^3+x^2}{2x^2+y}$$

(b)
$$\frac{2x^2+4}{x-3}-\frac{x^2-2}{x-3}=\frac{(2x^2+4)-(x^2-2)}{x-3}$$
$$=\frac{2x^2+4-x^2+2}{x-3}$$
$$=\frac{x^2+6}{x-3}$$

(c) نلاحظ هنا انه ليس للكسرين نفس المقام . ولكن يمكن الحصول على نفس المقام بضرب بسط ومقام الكسر الثاني في ١ ـ نحصل على

$$\frac{x^2-1}{4-x}=\frac{(-1)(x^2-1)}{(-1)(4-x)}=\frac{-x^2+1}{x-4}$$

ولذلك

$$\frac{3x^2+5}{x-4}+\frac{x^2-1}{4-x}=\frac{3x^2+5}{x-4}+\frac{-x^2+1}{x-4}$$
$$=\frac{(3x^2+5)+(-x^2+1)}{x-4}$$
$$=\frac{3x^2+5-x^2+1}{x-4}$$
$$=\frac{2x^2+6}{x-4}$$

لجمع أو طرح كسرين ليس لهما نفس المقام نحولهما الى كسور متكافئة (نضرب بسط ومقام كل كسر بكثير حدود مناسب) لها نفس المقام (المقام ≠ صفر) ثم نتبع القواعد السابقة .

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

مثال « ٦ » :

بسط كلا مما يأتي :

(a) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{2x+3}$ (b) $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$

الحل :

$$\text{(a) } \frac{x}{x-1} + \frac{2}{2x+3} = \frac{x(2x+3)}{(x-1)(2x+3)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$= \frac{x(2x+3) + 2(x-1)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 + 3x + 2x - 2}{(x-1)(2x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 + 5x - 2}{2x^2 + x - 3}$$

$$\text{(b) } \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

$$= \frac{x}{x+1} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)} - \frac{2(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$+\frac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x(x-1)(x+2)-2(x+2)+(2x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^3+x^2-2x-2x-4+2x^2-x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^3+3x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^3+3x^2-5x-5}{x^3+2x^2-x-2}$$

كما جاء في مثال ٦ b من المرغوب استخدام أصغر مقام مشترك للكسور . يمكن ايجاد المقام المشترك البسيط الأصغر وذلك بتحليل مقام كل من الكسور أولا ثم ايجاد حاصل ضرب العوامل الأولية التي تتكون منها مقامات الكسور باستخدام أكبر قوى لكل عامل .

مثال « ٧ » :

بسط

$$\frac{x+2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}$$

الحل :

بعد تحليل مقامات الكسور نحصل على $(x+1)^2$ ، $(x-1)(x+1)$ ، $(x+1)$ اذاً فالمضاعف المشترك البسيط للمقامات هو $(x+1)^2(x-1)$ وعليه فان

$$\frac{x+2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}-\frac{1(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}+\frac{x(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)-(x+1)+x(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{x^2+x-2-x-1+x^3-x}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{x^3+x^2-x-3}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= \frac{x^3+x^2-x-3}{x^3+x^2-x-1}$$

قد لا يمكن التعبير عن بسط أو مقام أو بسط ومقام كسر ما بكثير حدود . تسمى مثل هذه الكسور كسوراً مركبة . لتبسيط كسر مركب ندمج البسط أو المقام أو كلاهما حسب الضرورة وذلك ليصبح البسط والمقام كسراً واحداً . ثم نقسم البسط على المقام .

مثال « ٨ » :

بسط ما يأتي :

$$(a)\ \frac{x+\frac{1}{x}}{2x-\frac{1}{x-1}} \qquad (b)\ \frac{\frac{1-x}{x}-\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x}{x}-\frac{x}{1-x}}$$

الحل :

$$(a)\quad \frac{x+\frac{1}{x}}{2x-\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{1}\cdot\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{2x(x-1)-1}{x-1}}$$

$$= \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{2x^2-2x-1}{x-1}}$$

$$= \frac{x^2+1}{x} \div \frac{2x^2-2x-1}{x-1}$$

$$= \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x-1}{2x^2-2x-1}$$

$$= \frac{(x^2+1)(x-1)}{x(2x^2-2x-1)}$$

$$= \frac{x^3-x^2+x-1}{2x^3-2x^2-x}$$

$$\text{(b)}\ \frac{\frac{1-x}{x} - \frac{x}{1+x}}{\frac{1+x}{x} - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{(1-x)(1+x)}{x(1+x)} - \frac{x.x}{x(1+x)}}{\frac{(1+x)(1-x)}{x(1-x)} - \frac{x.x}{x(1-x)}}$$

$$= \frac{\frac{(1-x^2)-x^2}{x(1+x)}}{\frac{(1-x^2)-x^2}{x(1-x)}}$$

$$= \frac{\frac{1-2x^2}{x(1+x)}}{\frac{1-2x^2}{x(1-x)}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{x(1+x)} \div \frac{1-2x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{1-2x^2}{x(1+x)} \cdot \frac{x(1-x)}{1-2x^2}$$

$$= \frac{1-x}{1+x}$$

تمارين (٧) :

في التمارين من 1 الى 32 بسط كلا من المقادير المعطاة .

1. $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+4}$

2. $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x-y}{x}$

3. $\frac{x^2-y^2}{3x} \cdot \frac{x+y}{x-y}$

4. $\frac{(x+y)^2}{3xy} \div \frac{x^2-y^2}{xy}$

5. $\frac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}$

6. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x-2}$

7. $\frac{x^2-x-2}{x^2-4} \div \frac{3x+3}{x(x+2)}$

8. $\frac{2x^2+x-6}{4x^2-9} \div \frac{x^2+x-2}{2x+3}$

9. $\frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x}$

10. $\frac{2x+y}{x+y} - \frac{2x-xy}{x+y}$

11. $\frac{3x^2-2xy+4y^2}{x-y} - \frac{x^2-xy+5y^2}{x-y}$

12. $1-\frac{1}{x}$

13. $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

14. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} + \frac{3}{7x}$

15. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

16. $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$

17. $\frac{2x+3}{x-1} + \frac{1}{1-x^2}$

18. $\frac{1}{x-y} + \frac{x+y}{x^2-y^2}$

19. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{(2x+1)^2}{x^2-1}$

20. $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{xy}{y^2-x^2}$

21. $x-3+\frac{1}{x+3}$

22. $\frac{x}{2x-y} - \frac{y}{x+2y}$

23. $\left(\frac{x-1}{2x+1} + \frac{1}{x-1}\right) + 5$

24. $3 - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2-1}$

25. $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x}\right) \div \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right)$

26. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}$

27. $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$

28. $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

29. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$

30. $\dfrac{x}{\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}}-\sqrt{x^2+y^2}$

31. $\dfrac{\dfrac{y-2}{y-1}-\dfrac{y-1}{y-2}}{\dfrac{3}{y-1}-\dfrac{3}{y-2}}$

32. $\dfrac{2+\dfrac{3}{1-\dfrac{2}{v}}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{v}}}$

تمارين عامة للمراجعة

في المسائل من i الى 20 حدد او اشرح كل خطوة:

1. اتحاد وتقاطع فئتين .
2. الفئة الخالية .
3. الفئات المنفصلة .
4. قوانين التبادل والترابط للأعداد الحقيقية .
5. قاعدة عوامل الصفر .
6. الأعداد النسبية .
7. الأعداد غير النسبية .
8. بديهية الانقسام الى ثلاثة اجزاء .
9. b اقل من a
10. a اكبر من أو تساوي b
11. خواص المتباينات .
12. العناصر المحايدة.
13. فترة مفتوحة ، (a,b)
14. فترة مغلقة ، [a,b]
15. القيمة المطلقة لعدد حقيقي .
16. الأسس السالبة .
17. قاعدة الجذر النوني .
18. الأسس النسبية .
19. درجة كثير الحدود .

20. كثير الحدود الأولى

21. اذا كان $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ أوجد

$A \cup B \quad , \quad A \cap B$

22. اذا كان $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{b, c, x, y\}$ أوجد

$A \cup B \quad , \quad A \cap B$

23. اوجد كل الفئات الجزئية للفئة $A = \{1, 2, 4\}$

24. افرض ان A, B, C هي ثلاث فئات جزئية من الفئة الشاملة U

ارسم شكل فن لتمثيل كل من الفئات التالية

(a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B) \cap C$

(c) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (d) $A \cap B \cap C$

25. نفذ العمليات المشار اليها وبسطها

(a) $x^4 . x^6 . x^8$ (b) $(\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^6$

(c) $\frac{(\frac{1}{3})^7}{(\frac{1}{3})^4}$ (d) $[(5)^3]^2$

(e) $3^n . 9^{n-1} . 27^n$ (f) $\frac{4^n . 8^{2n} . (16)^{1-n}}{(32)^{n+1}}$

(g) $(3)^{-2} + (\frac{1}{2})^{-1}$ (h) $\frac{x^{-1} y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$

(i) $\frac{x^{2/3} . x^{-1/3}}{x^{-2}}$ (j) $\sqrt[3]{x} . \sqrt{x^{1/2}} \sqrt[3]{x^2}$

بسط المقام فيما يأتي :

26.

(a) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (d) $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

اوجد نواتج ما يأتي :

27.

(a) $(2x-5y)^2$ (b) $(2x-\dfrac{1}{2x})^2$

(c) $(2x-3y)^3$ (d) $(a-b+c)^2$

حلل كلاً مما يأتي :

28.

(a) $4x^2-9y^2$ (b) $4x^4+1$

(c) x^3+8y^3 (d) $2x^2+5x-12$

(e) $2x^2-xy-15y^2$ (f) $(a+2b)^3-27b^3$

نفذ العمليات الآتية وبسطها

29.

(a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2x-1}$ (b) $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{a}{x^2-a^2}$

(c) $\dfrac{4}{2x-1}-\dfrac{1}{1-4x^2}$ (d) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x-1}}$

الباب الثالث
المعادلات والمتباينات في متغير واحد

يبدأ هذا الباب بدراسة المعادلات الخطية . ثم ندرس عدة تطبيقات للمعادلات الخطية . المواضيع الأخرى في هذا الباب تشمل حل معادلات الدرجة الثانية وحل معادلات بشكل معادلات درجة ثانية . ثم نختم الباب بمناقشة حل المتباينات .

(٣ - ١) المعادلات الخطية :

تعريف «١» :

المعادلات الجبرية في المتغير x عبارة عن صيغة تعبر عن علاقة التساوي بين تعبيرين جبريين في x . يسمى المتغير في المعادلة أحياناً بالمجهول Unknown فيما يلي بعض المعادلات الجبرية

(1) $x = 3.$

(2) $x^2 - 2 = 0.$

(3) $3x + 4 = 7.$

(4) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$

(5) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{x(x + 1)}$

(6) $\dfrac{1}{x - 1} + 2 = 5.$

عندما يستبدل متغير في معادلة بعدد ما قد تكون العلاقة الناتجة صحيحة أو خاطئة . فمثلا في معادلة (3) اذا وضعنا $x = 0$ لحصلنا على $7 = 4$ وهذه علاقة خاطئة . ولكن اذا وضعنا $x = 1$ في نفس المعادلة لحصلنا على

$3(1) + 4 = 7$

وهذه علاقة صحيحة . لذلك فالعدد 1 يسمى حلا (أو جذراً) للمعادلة (3) . فئة جميع الحلول لأية معادلة تسمى فئة حلول المعادلة . فمثلا $x = 3$ هو حل من حلول المعادلة $x^2 = 9$ كذلك $x = -3$. يمكن اثبات ان اية معادلة من درجة (n) لا يمكن ان يكون لها اكثر من (n) من الجذور الحقيقية . وهكذا فان فئة حلول المعادلة $x^2 = 9$ هي $\{3, -3\}$. فئة الحلول للمعادلة $3x + 4 = 7$ هي $\{1\}$. ليس للمعادلة $x + 2 = x + 5$ فئة حلول . رأينا مما سبق انه قد يكون للمعادلة حل واحد او اكثر من حل واحد او قد لا يكون لها أي حل . ان لم يكن للمعادلة اي حل فيعبر عن فئة حلولها بالفئة الخالية ϕ .

نلاحظ ان الجهة اليمنى في كل من المعادلات (4) ، (5) نتائج عمليات جبرية أجريت على الجهات اليسرى المناظرة . من الواضح ان فئة حلول المعادلة (4) هي فئة الأعداد الحقيقية R ، وفئة حلول المعادلة (5) هي فئة الأعداد الحقيقية R باستثناء الأعداد التي تكون فيها المعادلة (5) غير معرفة . في هذه الحالة المعادلة (5) غير معرفة في $x = 0$ و $x = -1$. وعليه فان فئة الحلول للمعادلة (5) هي :

$$\{x / x \in R, x \neq o, -1\}$$

معادلات من نمط (4) و (5) تسمى متطابقات Identities . وعليه فان المتطابقة هي معادلة تتحقق بجميع قيم المتغير التي تكون المعادلة فيها معرفة . المعادلة التي ليست متطابقة تسمى شرطية Conditional Equation سوف نهتم في هذا الفصل بالمعادلات الشرطية التي يمكن حلها بواسطة معادلات خطية على شكل $a x + b = 0$ حيث ان كلا من b, a عدد حقيقي $a \neq 0$.

تحديد فئة حلول المعادلة تسمى حل المعادلة . يمكن حل معادلة أحياناً بطريقة (المحاولة والخطأ) . ولكن بصورة عامة يستخدم اولا مفهوم المعادلات المتكافئة Equivalent Equations .

تعريف « ٢ » :

تسمى المعادلات التي لها نفس فئة الحلول معادلات متكافئة .

مثال « ١ » :

(أ) المعادلات

$$3x - 4 = 8$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

هي معادلات متكافئة لأن فئة الحلول لكل منها هي $\{4\}$

(ب) المعادلات

$$x = 1$$
$$x^2 = x$$

ليست متكافئة ، وذلك لأن فئة الحلول للمعادلة الأولى هي $\{1\}$ بينما فئة الحلول للمعادلة الثانية هي $\{0,1\}$.

لحل معادلة خطية نحولها الى معادلة متكافئة حلها معلوم . هناك خاصيتان بسيطتان يمكن استخدامهما للوصول الى هذا الغرض .

(١) خاصية الجمع :

اذا كانت المعادلة $a = b$ صحيحة كذلك المعادلة $a+c=b+c$ صحيحة لأي عدد c .

لنوضح هذه الخاصية بمثال بسيط

$$x + 3 = 7 \qquad (7)$$

نضيف (-3) الى الطرفين فنحصل على

$$x + 3 + (-3) = 7 + (-3) \qquad (8)$$

$$x = 4 \qquad (9)$$

حسب خاصية الجمع اذا كانت المعادلة $x + 3=7$ صحيحة فكذلك المعادلة $x = 4$ صحيحة . وعليه فان أي حل للمعادلة $x+3=7$ هو حل كذلك للمعادلة $x = 4$. من الواضح ان الحل الوحيد للمعادلة $x = 4$ هو $\{4\}$. وهو كذلك حل للمعادلة $x+3=7$ ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض عن x بالعدد 4 في المعادلة

$$x + 3 = 7$$

ويمكن كذلك عكس العمليات . أي اننا نبدأ بالمعادلة (9) ثم باضافة 3 الى طرفي (9) نحصل على المعادلة (7) . وعليه فإن أية قيم لـ x تجعل (9) صحيحة ، تجعل (7) صحيحة أيضاً . وعليه فان المعادلتين (7) و (9) متكافئتان .

ملاحظة :

في جميع الحالات التي يمكن ان تعكس فيها خطوات البرهان نحصل على معادلات متكافئة .

وعليه فان استخدام خاصية الجمع دائماً تنتج معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية . وعليه فان التأكد بالتعويض ليس ضرورياً .

خاصية الضرب :

اذا كانت المعادلة $a=b$ صحيحة فان المعادلة $a.c = b.c$ كذلك صحيحة لأي عدد حقيقي c .

نلاحظ ان خطوات البرهان هنا عكسية بشرط ان $c \neq 0$. ولكن في حالة ان $c = 0$ فان $\frac{1}{c}$ لا وجود لها . وعليه نحصل على معادلات متكافئة فقط في حالة ضرب طرفي المعادلة في عدد لا يساوي صفراً .

مثال « ٢ » :

حل المعادلة الآتية :

$$3x - 1 = 8 \qquad (10)$$

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x} \qquad (11)$$

حل (10) :

$$3x - 1 = 8$$

(خاصية الجمع)

$$3x - 1 + 1 = 8 + 1$$

$$3x = 9$$

(خاصية الضرب)

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(9)$$

$$x = 3$$

بما اننا استخدمنا خاصية الجمع وخاصية الضرب بعدد لا يساوي صفر ($\frac{1}{3}$) فان عملية الحل انتجت معادلات مكافئة .

$$3x - 1 = 8, 3x = 9, x = 3$$

فئة الحل في هذه الحالة هي {3}

حل (11) :

افرض اننا نضرب طرفي (11) في x^2 نحصل على

$$\frac{2}{x} \cdot x^2 = \frac{3}{x} \cdot x^2$$

او

$$2x = 3x$$

او

$$2x + (-2x) = 3x + (-2x)$$

او

$$x = 0 \qquad (12)$$

فالحل الممكن للمعادلة (11) هو $x = 0$ ولكن عند تعويض $x = 0$ في المعادلة الأصلية نحصل على

$$\frac{2}{0} = \frac{3}{0}$$

وهذه غير معرفة . وعليه فان $x = 0$ ليست حلاً للمعادلة (11) . وعليه فان المعادلتين (11) و (12) غير متكافئتين . وفئة الحلول للمعادلة (11) هي الفئة الخالية .

وعليه فاذا ضربنا طرفي معادلة بمتغير قد لا نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية . ولكن فئة حلول المعادلة الأصلية فئة جزئية لفئة حلول المعادلة الجديدة . اذاً يجب ان نتأكد من الحلول الممكنة بتعويضها في المعادلة الأصلية .

مثال « ٣ » :

أوجد قيمة x في

$$\frac{2x}{3} = 5 - \frac{x}{2} \qquad (13)$$

الحل :

نتخلص اولاً من الكسور وذلك بايجاد المضاعف المشترك البسيط لمقامات الكسور $\frac{2x}{3}$ و $\frac{x}{2}$ (يمكن اعتبار 5 كأنها $\frac{5}{1}$) .

اضرب طرفي (13) بالمضاعف المشترك البسيط للمقامات وفي هذه الحالة هو 6 ، وعليه

(خاصية الضرب)

$$6\left(\frac{2x}{3}\right) = 6\left(5 - \frac{x}{2}\right)$$

$$4x = 30 - 3x$$

$$7x = 30$$ (خاصية الجمع)

$$x = \frac{30}{7}$$ (خاصية الضرب)

فئة الحلول هي $\{\frac{30}{7}\}$

ويترك التحقق من صحة الجواب للقارىء :

مثال « ٤ » :

أوجد قيمة x في

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{2} \tag{14}$$

الحل :

بضرب طرفي (14) في المضاعف المشترك البسيط للمقامات وهو 12x نحصل على

$$12x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = 12x\left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$12 + 4x = 9 + 6x$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

التحقيق :

عندما $x = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$1 = 1.$$

وعليه فان فئة الحلول هي $\{\frac{3}{2}\}$

مثال « ٥ » :

حل المعادلة الآتية :

$$\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x+4} = \frac{8}{x^2-16} \qquad (15)$$

الحل :

بضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك البسيط للمقامات نحصل على

$$(x^2-16)\left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x+4}\right) = (x^2-16) \cdot \frac{8}{x^2-16}$$

$$(x+4)(x-4)\left(\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x+4}\right) = 8$$

$$(x+4) - 5(x-4) = 8$$

$$x + 4 - 5x + 20 = 8$$

$$-4x = -16$$

$$x = 4.$$

التحقيق :

$$\frac{1}{4-4} - \frac{5}{4+4} \times \frac{8}{16-16}$$

$$\frac{1}{0} - \frac{5}{8} = \frac{8}{0}.$$

بما ان القسمة على صفر غير معرفة نرفض $x = 4$ كحل للمعادلة (15) وفئة الحلول هي الفئة الخالية .

من المفيد للقارىء ان يحاول معرفة لماذا حصلنا في مثال (4) على معادلات متكافئة عندما ضربنا طرفي المعادلة الأصلية في متغير بينما لم نحصل في مثال (5) على معادلات متكافئة عندما ضربنا طرفي المعادلة الأصلية في متغير .

قد تحتوي المعادلة على متغيرين او اكثر ويطلب منا احياناً ان نجد قيمة احد المتغيرات بدلالة المتغيرات الأخرى . في هذه الحالة نعامل المتغير الذي نجد قيمته كأنه المجهول ونعامل المتغيرات الاخرى والرموز كأنها معلومات .

مثال (٦)

اوجد قيمة a

$$(16) \quad S = \frac{1}{2}gt^2 + at$$

الحل :

المعادلة (16) مكافئة للمعادلة

$$S - \frac{1}{2}gt^2 = at$$

او

$$\frac{2S - gt^2}{2} = at$$

او

$$\frac{2S - gt^2}{2t} = a \quad (t \neq 0)$$

تمارين (١) :

في التمارين 1 الى 4 بين أي زوج من المعادلات متكافئة

1. $2x - 3 = 5$ ، $2x = 8$

2. $y = -2$ ، $y^2 = 4$

3. $\frac{2}{x} = \frac{7}{x}$ ، $2x = 7x$

4. $3x - 2 = 5$ ، $7x + \frac{2}{3} = 17$

في التمارين من 5 الى 30 اوجد فئة حلول كل من المعادلات

5. $4x + 3 = 11$

6. $3x - 2 = 7$

7. $2x - 6 = -5$

8. $5 = 4x + 11$

9. $2y - 5 = 7 - 3y$

10. $u + 6 = 4 + 2(u + 5)$

11. $2(3x - 4) = 5(1 - 3x) + 8$

12. $5x - 3[2x - 4(x - 2)^4] = -5$

13. $\frac{1}{3} - 2x = -x + \frac{2}{3}$

14. $\frac{11}{50} + x = \frac{3}{10} - \frac{2x}{25}$

15. $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{1}{2}$

16. $\frac{1 - 2x}{15} = \frac{1}{5} - \frac{2x - 3}{2}$

17. $\frac{2 - 3x}{4} - \frac{1 - 3x}{6} = \frac{1}{12} + \frac{x - 2}{3}$

18. $\frac{3[(5x - 2)x - (3x + 4)]}{8} + \frac{1}{3} = \frac{x - 4}{6}$

19. $\frac{2}{x} - 3 = \frac{5}{x}$

20. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x}$

21. $\frac{2}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$

22. $\frac{1}{3 - y} + \frac{7}{2y + 3} = 0$

23. $\frac{x}{x - 2} = -\frac{2}{3}$

24. $\frac{x}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} = 1$

25. $3 - \frac{2 - x}{x + 1} = \frac{5x + 3}{x + 2} - 1$

26. $\frac{1 + 2x}{1 - 3x} + \frac{1 - x}{3x - 1} = \frac{1}{2}$

27. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$

28. $\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+1}{2-x} - \frac{x^2+3x+1}{x^2-4} = 0$

29. $\frac{x}{x-3} + \frac{x^2-2}{9-x^2} = \frac{1}{x+3}$

30. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$

في التمارين من 31 الى 40 حل القاعدة للمتغير المعطى

31. $F = \frac{9}{5}C + 32$, for C.

32. $y = mx + b$, for x.

33. $A = 2\pi rx + \pi r^2$, for x.

34. $s = \frac{a - ar^n}{1-r}$, for a.

35. $p = \frac{A}{1+rt}$, for t.

36. $A = \frac{a+b}{2}h$, for a.

37. $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, for u.

38. $T = a + (n-1)d$ for d.

39. $T = a + (n-1)d$, for n.

40. $y = x(a + \frac{c}{n})$, for n.

(٣ ـ ٢) تطبيقات على المعادلات الخطية :

لحل كثير من المسائل العملية في الجبر نستخدم متغيراً لكل مجهول ونحوّل المعلومات المعطاة الى معادلة او معادلات يمكننا حلها . سنهتم في هذا الفصل بالمسائل التي يمكن حلها بواسطة معادلات خطية في متغير واحد . بعد تحديد المجَاهيل من صيغة المسألة ، من الضروري أن يكتب كل مجهول بدلالة متغير واحد فقط . لحل المسائل العملية ربما تكون الخطوات التالية مفيدة :

١ ـ اقرأ المسألة بعناية تامة حافظاً في الذهن المعلومات والمجاهيل .

٢ ـ ارسم شكلاً (اذا كان ممكناً) .

٣ ـ استخدم متغيراً ليمثل كل مجهول .

٤ ـ اذا كان هناك اكثر من مجهول واحد استخدم المعلومات المذكورة في المسألة في كتابة جميع المجاهيل بدلالة متغير واحد فقط .

٥ ـ استخدم المعلومات المعطاة في المسألة في كتابة معادلة تربط المجاهيل والأعداد المعلومة .

٦ ـ حل المعادلة .

٧ ـ حقق لترى ما اذا كان الجواب الذي حصلت عليه من حل المعادلة يحقق المسألة المعطاة .

طريقة الحل موضّحة في الأمثلة التالية .

مثال « ١ » :

أوجد ثلاثة اعداد صحيحة متتالية مجموعها 39 .

الحل :

افرض ان x هو أصغر الأعداد الثلاثة . بما ان الأعداد التي نبحث عنها متتالية فالأعداد الأخرى هي $(x+1)$ و $(x+2)$. وعليه فان المجاهيل الثلاثة بدلالة متغير واحد

هي x و x + 1 و x + 2

بما ان مجموع الأعداد الثلاثة يساوي 39 . إذاً

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 39$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$3x + 3 = 39$$

أو

$$3x = 36$$

أو

$$x = 12$$

اضافة الى ذلك

$$x + 1 = 13$$
$$x + 2 = 14$$

تحقيق :

$$12 + 13 + 14 = 39$$

مثال « ٢ » :

مجموع العمرين الحاليين لمحمد وعبدالله هو 35 وبعد 5 سنوات سيصبح عمر محمد ضعف عمر عبدالله . فما عمر كل منهما الآن؟ .

الحل :

افرض ان عمر محمد الحالي هو x . بما ان مجموع العمرين الحاليين لمحمد وعبدالله هو 35 . اذاً عمر عبدالله الحالي هو (35 − x) بعد خمس سنوات سيصبح عمر محمد (x+5) .

بعد خمس سنوات سيصبح عمر عبدالله

$$(35 - x) + 5 = 40 - x$$

نحصل من المعلومات المعطاة في المسألة على

$$x + 5 = 2(40 - x)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على

$$x + 5 = 80 - 2x$$

او

$$3x = 75$$

او

$$x = 25$$

اذاً عمر محمد الحالي هو 25 وعمر عبدالله الحالي هو

$$35 - x = 35 - 25 = 10$$

تحقيق :

$$25 + 10 = 35$$

بعد خمس سنوات سيصبح عمر محمد 25+5 = 30 وسيصبح عمر عبد الله 15 ومن الواضح ان

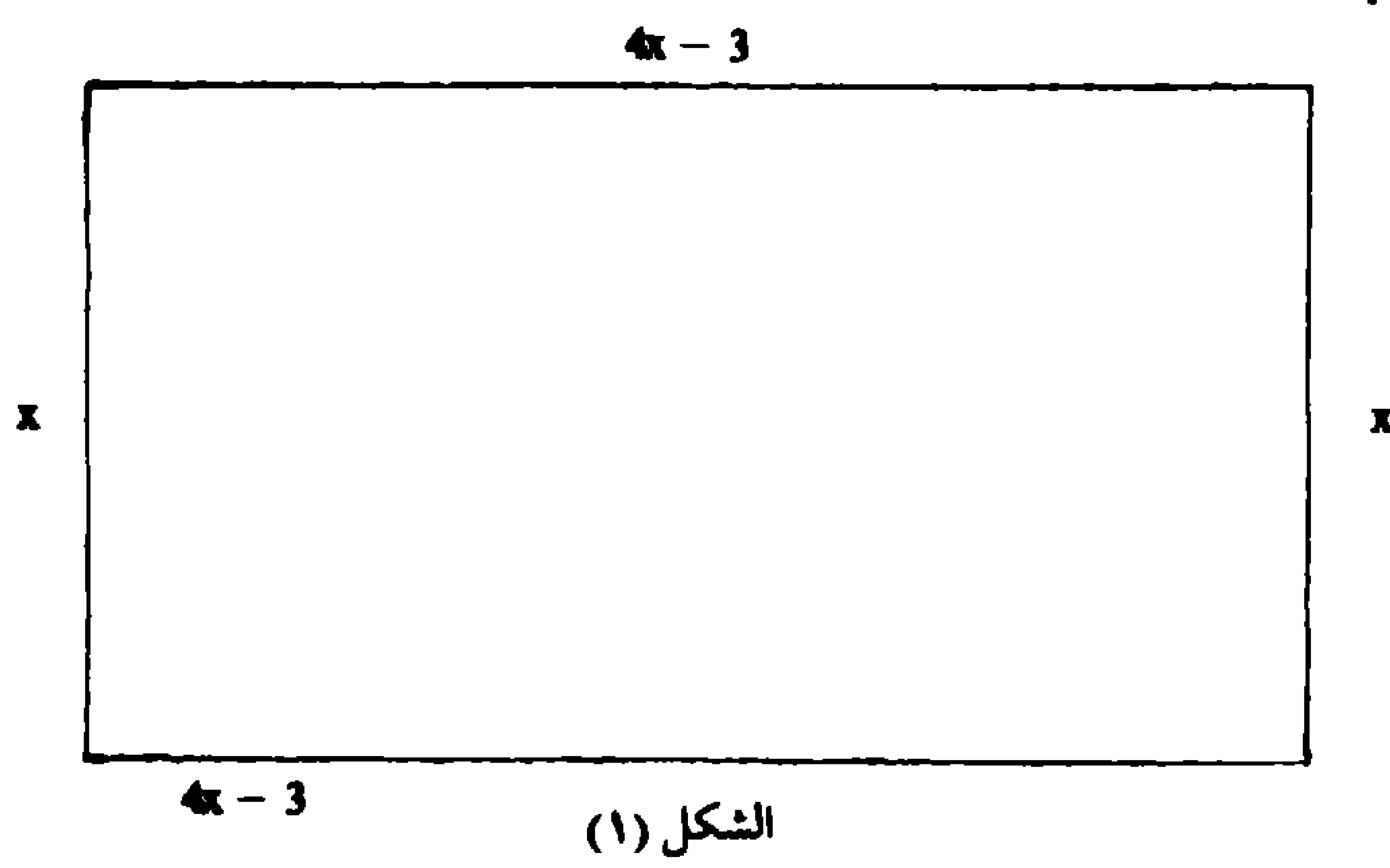
$$30 = 2(15)$$

مثال « ٣ » :

طول مستطيل يقل عن اربعة أمثال عرضه بمقدار 3 اقدام ، اوجد ابعاد المستطيل اذا كان محيطه 64 قدماً .

الحل :

افرض ان x هو عرض المستطيل . لذلك فان طول المستطيل يساوي 3 - 4x (أنظر الى الشكل) .



الشكل (١)

ولكن محيط المستطيل يساوي 64 . وعليه فان

$$[x + (4x - 3)] + [x + (4x - 3)] = 64$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$10x - 6 = 64$$

أو

$$10x = 70$$

أو

$$x = 7$$

اذا عرض المستطيل يساوي 7 اقدام وطوله يساوي

$$4x - 3 = 4(7) - 3 = 25$$ قدم

التحقيق :

المحيط يساوي

$$7 + 25 + 7 + 25 = 64$$ قدم

مثال « ٤ » :

كيس به اربعة عشر قطعة بعضها من فئة خمس وعشرين هللة وبعضها من فئة عشر هللات والبعض الآخر من فئة خمس هللات . اوجد كلا من هذه الفئات اذا كان مجموع قيمتها جميعها 1.30 ريالاً وعدد قطع النقود من فئة عشر هللة يزيد 2 عن عدد قطع النقود من فئة 25 هللة .

الحل :

افرض ان x عدد قطع النقود من فئة 25 هللة . لذا فان $x+2$ هو عدد قطع النقود من فئة 10 هللة . وعدد قطع النقود من فئة 5 هللة هو $14 - [x + (x+2)] = 12 - 2x$.

قيمة x قطعة من فئة 25 هللة هي $25x$ ، وقيمة $(x+2)$ قطعة من فئة 10 هللة هي $10(x+2)$ ، وقيمة $12 - 2x$ قطعة من فئة 5 هللة هي $5(12 - 2x)$. لذلك نحصل على المعادلة :

$$25x + 10(x + 2) + 5(12 - 2x) = 130$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$25x + 10x + 20 + 60 - 10x = 130$$

او

$$25x = 50$$

او

$$x = 2$$
$$x + 2 = 4$$
$$12 - 2x = 8$$

اذاً الكيس يحتوي على قطعتين من فئة 25 هللة و 4 قطع من فئة 10 هللة و 8 قطع من فئة 5 هللة .

التحقيق :

قيمة قطعتين من فئة 25 هللة و 4 قطع من فئة 10 هللة و 8 قطع من فئة 5 هللة هي :
$50 + 40 + 40 = 130$ هللة $= 1.30$ ريال

مثال « ٥ » :

كم غالون من ٪40 من محلول حامض الكبريتيك وكم غالون من ٪ 20 من نفس الحامض يجب خلطهما للحصول على 50 غالون من ٪ 25 من محلول حامض الكبريتيك ؟ .

الحل :

افرض ان x تمثل عدد غالونات محلول 40% من حامض الكبريتيك اللازم استعمالها . لذا فان $(50 - x)$ هو عدد الغالونات من محلول 20% من حامض الكبريتيك . لنعتبر الآن x كمية الحامض النقية . عدد غالونات الحامض النقي في x غالون من محلول

40% هو 0.4x . وعدد غالونات الحامض النقي في (x - 50) غالون محلول 20% هو (x - 50) 0.2 . وعدد غالونات الحامض النقي في 50 غالون محلول 25% هو (50) 0.25 = 12.5 لذلك نحصل على المعادلة الآتية :

$$4x + 2(50 - x) = 125$$

أو

$$4x + 100 - 2x = 125$$

أو

$$2x = 25$$

أو

$$x = 12.5$$
$$50 - 12.5 = 37.50$$

اذا يجب خلط 12.5 غالون من محلول 40% مع 37.5 غالون من محلول 20% .

التحقيق :

12.5 غالون من محلول 40% تعطى 5 غالونات من الحامض النقي و 37.5 غالون من محلول 20% تعطى 7.5 غالون من الحامض النقى و 7.5 + 5 = 12.5 .

مثال « ٦ » :

قاد رجل سيارته من مدينة الى اخرى بمتوسط سرعة 80 كم/ ساعة وكانت متوسط سرعته في الرجوع الى المدينة الأولى 96 كم/ ساعة وكان زمن رجوعه اقل بساعة من زمن ذهابه . اوجد المسافة بين المدينتين .

الحل :

افرض ان المسافة بين المدينتين تساوي x كم . نستخدم القانون

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{متوسط السرعة}}$$

فالزمن المستغرق في الذهاب بسرعة 80 كم/ ساعة = $\frac{x}{80}$ ساعة

والزمن المستغرق في الرجوع وبسرعة 96 كم/ ساعة = $\frac{x}{96}$ ساعة

بما ان زمن الرجوع اقل بساعة واحدة من زمن الذهاب . لذلك نحصل على المعادلة

$$\frac{x}{80} = \frac{x}{96} + 1$$

بضرب طرفي المعادلة في 480 نحصل على

$$6x = 5x + 480$$

او

$$x = 480$$

مثال « ٧ » :

يستطيع ليث طلاء بيت في 12 ساعة ويستطيع زيد طلاء نفس البيت في 20 ساعة اذا اشتغل كل منهما بمفرده . كم ساعة يستغرقها الاثنان معاً في طلاء البيت .

الحل :

تستخدم هنا القاعدة التي تقول انه اذا كان بالامكان انجاز عمل ما في t من الساعات فخلال ساعة واحدة ينجز $\frac{1}{t}$ من العمل فقط .

افرض انه عند اشتغال ليث وزيد سوياً ينجز العمل خلال x من الساعات ، اذاً $x(\frac{1}{12}) = \frac{x}{12}$ من العمل ينجز من قبل ليث و $x(\frac{1}{20}) = \frac{x}{20}$ من العمل ينجز من قبل زيد ؛ بما ان الاثنين اشتغلا لانجاز نفس العمل . لذلك عندنا المعادلة

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{20} = 1$$

بضرب طرفي المعادلة في 60 نحصل على

$$5x + 3x = 60$$

او

$$8x = 60$$

او

$$x = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7.5 \quad \text{ساعة}$$

تمارين (٢) :

1 . ثلاثة أمثال عدد يساوي 11 . أوجد العدد .

2 . ثلاثة أمثال عدد يزيد بمقدار 7 عن 40 . أوجد العدد .

3 . مجموع عددين يساوي 28 ، وأحدهما ثلاثة امثال الآخر . اوجد العددين .

4 . مجموع ثلاثة اعداد صحيحة زوجية متتالية يساوي 30 . اوجد الأعداد .

5 . مجموع اربعة اعداد صحيحة فردية متتالية يساوي 40 . اوجد هذه الأعداد .

6 . رجل عمره 40 عاماً وعمر ابنه 8 سنوات . بعد كم سنة يصبح عمر الاب ثلاثة أمثال عمر الابن ؟

7. مجموع عمري محمد وعبد العزيز يساوي 11 . وبعد سنتين يصبح عمر محمد ضعف عمر عبد العزيز . اوجد عمر كل منهما الآن .

8. قبل عشر سنوات كان عمر عبدالله اربعة امثال عمر فهد . وعمر عبدالله الآن 4 سنوات اكثر من ضعف عمر فهد . اوجد عمر كل منهما الآن .

9. مستطيل محيطه 80 متراً . اوجد ابعاده اذا كان طوله 5 امتار اقل من ضعف عرضه .

10. عرض مستطيل 3 امتار اكثر من نصف طوله ومحيطه يساوي 36 متراً . اوجد بعديه .

11. عدد مكوّن من رقمين . مجموع رقميه يساوي 9 . وباستبدال رقم الآحاد برقم العشرات وبالعكس كان العدد الناتج يزيد بمقدار 27 عن العدد الأصلي . اوجد العدد الأصلي (تذكّر انه اذا كان الآحاد x والعشرات y فان قيمة العدد تساوي $x+10y$).

12. عدد مكوّن من ثلاثة ارقام . مجموع ارقامه الثلاثة يساوي 12 ، ورقم

العشرات يزيد بمقدار 1 عن ضعف رقم المئات . اذا استبدل رقم الآحاد برقم المئات وبالعكس فان العدد الجديد اقل بمقدار 99 من العدد الأصلي . اوجد العدد الأصلي .

13. كيس يحتوي على 25 قطعة من النقود من فئة خمس هللات وعشر هللات . اوجد عدد القطع من كل فئة اذا كانت القيمة الكلية لها تساوي 1.95 ريالاً .

14. يملك عبدالله مجموعة من قطع النقود بعضها من فئة 10 هللات والبعض الآخر من فئة 25 هللة وعدد قطع النقود من فئة 10 هللات يعادل ثلاثة امثال عدد قطع النقود من فئة 25 هللة . اوجد عدد قطع النقود من كل فئة اذا كان مجموع قيمها الكلية 5.50 ريالاً .

15. صندوق يحتوي على قطع من النقود المجموع الكلي لقيمها يساوي 3.60 ريالاً ومؤلفة من قطع من فئة خمس هللات وعشر هللات و 25 هللة ، والمجموع الكلي لعدد قطع النقود هو 32 اوجد عدد قطع النقود من كل فئة علماً بأن عدد قطع النقود من فئة 10 هللات تساوي اربع امثال عدد قطع النقود من فئة 25 هللة .

16. يرغب مدير مخزن في خلط نوعين من السكر ، سعر الكيلوغرام الواحد من النوع الأول 1.20 ريال وسعر الكيلوغرام الواحد من النوع الثاني 1.36 ريالا لتكوين 40 كيلوغرام من الخليط سعر الكيلوغرام الواحد منه 1.30 ريالا . اوجد وزن كل من النوعين من السكر اللازمين لتركيب الخليط .

17. اوجد عدد ألتار الماء التي ينبغي اضافتها الى محلول يحتوي على 20% من حامض للحصول على 50 لتراً من محلول يحتوي على 6% من الحامض .

18. اوجد عدد ألتار محلول يحتوي على 20% من الملح اللازم خلطها مع محلول يحتوي على 45% من نفس الملح للحصول على 60 لتراً من محلول يحتوي على 35% من الملح .

19. عبد المنعم يكتب مذكرات في الأساليب الكمية في 6 ساعات وعصام يكتب نفس المذكرات خلال 8 ساعات . اوجد عدد الساعات المستغرقة في كتابة المذكرات اذا اشتغل عبد المنعم وعصام في كتابة تلك المذكرات .

20. حنفية A تملأ خزاناً للماء في 40 دقيقة . وحنفية B تملأ نفس الخزان في 36 دقيقة . اذا فتحت الحنفيتان معاً في نفس الوقت ، اوجد الوقت اللازم لملأ الخزان .

(٣ ـ ٣) معادلات الدرجة الثانية Quadratic Equations :

كل معادلة مكافئة للمعادلة

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

حيث ان كلا من a ، b ، c ، عدد حقيقي و $a \neq 0$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية في المتغير x

اذا كانت المعادلة في النمط (١) ، يقال انها في الصيغة القياسية . المعادلات

$$2x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$3 = 4x - x^2$$

$$x^2 - 2 = 3x$$

$$x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$5x^2 - 2x = 7$$

كلها معادلات من الدرجة الثانية .

احدى طرق حل معادلات الدرجة الثانية مبنية على الخاصية الآتية للاعداد الحقيقية .

قاعدة عوامل الصفر Principle of Zero Factors :

اذا كان كل من a ، b عدداً حقيقياً ، فان $ab = 0$ اذا واذا فقط $a = 0$ أو $b = 0$

مثال « ١ » :

اوجد فئة الحلول للمعادلة

$$(2) \qquad x^2 - x - 6 = 0$$

الحل :

بتحليل الجهة اليسرى نحصل على

$$(x - 3)(x + 2) = 0 \quad (3)$$

باستخدام قاعدة عوامل الصفر نستنتج ان (3) صحيحة اذا وفقط اذا

$$x - 3 = 0 \quad (4)$$

او

$$x + 2 = 0 \quad (5)$$

نستنتج من (4) ان $x = 3$ ونستنتج من (5) ان $x = -2$. اذا فئة الحلول للمعادلة(2) هي $\{-2, 3\}$. يمكن تحقيق صحة هذا الحل بتعويض 2- ، 3 في المعادلة الأصلية .

مثال « ٢ » :

حل المعادلة الآتية بالتحليل الى العوامل

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

الحل :

بالتحليل نحصل على

$$(x - 3)^2 = 0$$

أو

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

بوضع كل عامل مساوياً الى الصفر نحصل على نفس قيمة x التي تساوي 3 كحل للمعادلة . اذا $\{3\}$ هي فئة حلول المعادلة المعطاة . بما ان العامل $x - 3$ يظهر مرتين يسمى العدد 3 جذراً مزدوجاً . يمكن اثبات ان كل معادلة من الدرجة الثانية عدد جذورها لا يزيد على اثنين . في المثال (١) الجذران غير متساويين وفي المثال (٢) الجذران متساويان .

لو حاولنا حل المعادلة

$$x^2 = 2$$

نكتبها اولا بشكل

$$x^2 - 2 = 0$$

وبالتحليل نحصل على

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

نضع كل عامل مساوياً للصفر ونحصل على

$$x - \sqrt{2} = 0 \quad , \quad x + \sqrt{2} = 0$$

ونحصل على

$$x = \sqrt{2} \quad , \quad x = -\sqrt{2}$$

اذا فئة الحلول للمعادلة المعطاة هي $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

يمكن حل المعادلة كذلك باستخدام تعريف الجذر التربيعي . أي ان :

$$x^2 = 2$$

اذا واذا فقط

$$x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}$$

نستخدم احياناً $\mp\sqrt{2}$ للدلالة على العددين $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ بطريقة مماثلة . من السهل اثبات ان لأي عدد حقيقي $d \geq o$ عندنا

$$x^2 = d$$

اذا واذا فقط

$$x = \pm\sqrt{d}$$

حيث $x = \pm\sqrt{d}$ طريقة مختصرة لكتابة المعادلتين

$$x = \sqrt{d} \quad , \quad x = -\sqrt{d}$$

اذا كان $d < 0$ فليس هناك حل حقيقي بنفس البرهان اذا كان p مقداراً جبرياً ففئة الحلول

$$p^2 = d$$

هي اتحاد حلول المعادلتين

$$p = \sqrt{d} \quad , \quad p = -\sqrt{d}$$

مثال « ٣ » :

اوجد قيمة x في

$$(x - 3)^2 = 5$$

الحل :

فئة حلول هذه المعادلة هي اتحاد فئتي حلول المعادلتين

$$x - 3 = \sqrt{5}, \quad x - 3 = -\sqrt{5}$$

او

$$x = 3 + \sqrt{5}, \quad x = 3 - \sqrt{5}$$

اذا فئة حلول المعادلة (6) هي $\{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$

يمكن تطبيق الطريقة المستخدمة في حل المثال (٣) لحل اية معادلة من الدرجة الثانية كما هو موضح في المثال التالي .

مثال « ٤ » :

حل المعادلة الآتية

$$(7) \qquad x^2 - 2x - 1 = 0$$

الحل :

نحول المعادلة (7) الى معادلة مكافئة من نمط (6) كما يلي : باضافة 1 الى طرفي المعادلة نحصل على

$$(8) \qquad x^2 - 2x = 1$$

نضيف الآن الى الطرفين مربع نصف معامل x اي اننا نضيف $1 = (\frac{-2}{2})^2$ الى الطرفين فنحصل على

$$(9) \qquad x^2 - 2x + 1 = 2$$

يمكن تحليل الجهة اليسرى الآن كمربع كامل فنحصل على

$$(10) \quad (x-1)^2 = 2$$

وهذه المعادلة من نمط المعادلة (6) ، وعليه فان فئة حلول المعادلة (10) هي اتحاد فئتي حلول المعادلتين .

$$x-1=\sqrt{2} \;, \quad x-1=-\sqrt{2}$$

أو

$$x=1+\sqrt{2} \;, \quad x=1-\sqrt{2}$$

والتي يمكن كتابتها بشكل

$$x=1\pm\sqrt{2}$$

تسمى الطريقة هذه طريقة اكمال المربع . استعمالها يتطلب ايجاد الحد الثابت اللازم لتكوين المربع الكامل . بصورة عامة اذا اعطينا

$$(11) \quad x^2+kx$$

نضيف $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ لتكوين مربع كامل . بما ان

$$x^2+kx+\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2$$

نلاحظ ان في (11) معامل x^2 يساوي 1 . وفي حالة ان معامل x^2 لا يساوي 1 يجب ان نقسم اولا المعادلة المعطاة على معامل x^2 ثم نستمر كما بيّنا سابقاً طريقة اكمال المربع يمكن استخدامها لايجاد قانون لحل اية معادلة من الدرجة الثانية في الصيغة القياسية .

نظرية « ١ » :

اذا كان للمعادلة

$$(12) \quad ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

حلول فيمكن حساب الحلول حسب القانون

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

البرهان :

بما ان $a \neq 0$ فنقسم اولا على a ونحصل على

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (13)$$

باضافة مربع نصف معامل x ، الذي يساوي $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ نحصل على .

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad (14)$$

أو

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (15)$$

أو

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

أو

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

أو

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (16)$$

نستنتج من هذا ان فئة حلول المعادلة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

هي

$$\left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

يستخدم هذا القانون لايجاد فئة حلول اية معادلة من الدرجة الثانية وذلك بالتعويض في القانون عن قيم c, b, a من المعادلة المعطاة .

مثال « ٥ » :

حل كلا من المعادلتين الآتيتين

$$(17)\quad x^2 + 5x = 2$$

$$(18)\quad x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

الحل :

كتابة المعادلة (17) بالصورة القياسية تكون

$$(19)\quad x^2 + 5x - 2 = 0$$

بالنسبة للمعادلة (١٩) لدينا

$$a = 1, b = 5, c = -2$$

بالتعويض عن هذه القيم في القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نحصل على

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-2)}}{2.(1)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 8}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

اذا فئة الحلول هي $\left\{ \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{33}}{2} \right\}$

اذا ضربنا طرفي المعادلة (18) في 6 نحصل على

$$(20) \quad 6x^2 + x + 2 = 0$$

لهذه المعادلة $a = 6$ و $b = 1$ و $c = 2$ وبالتعويض عن هذه القيم في القانون نحصل على

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(6)(2)}}{2.(6)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 48}}{12}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-47}}{12}$$

بما ان $\sqrt{-47}$ لا يمثل عدداً حقيقياً فليست للمعادلة جذور حقيقية . يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ بالمميز Discriminant . يعين المميز طبيعية جذور معادلة الدرجة الثانية .

(١) اذا كان المميز صفراً فالجذران حقيقيان ومتساويان .

(٢) اذا كان المميز موجباً فالجذران حقيقيان وغير متساويين .

(٣) اذا كان المميز سالباً فليس للمعادلة جذور حقيقية .

مثال « ٦ » :

اوجد قيمة k التي تجعل جذري المعادلة

$$(21) \quad 2x^2 + kx + 8 = 0$$

حقيقيين ومتساويين .

الحل :

في هذه المعادلة

$$a = 2, \quad b = k, \quad c = 8$$

للمعادلة جذران حقيقيان ومتساويان اذا كان المميز صفراً . اي ان

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$k^2 - 4(2)(8) = 0$$

أو

$$k^2 - 64 = 0$$

أو

$$k^2 = 64$$

أو

$$k = \pm 8$$

التحقيق :

اذا كان $k = 8$ فالمعادلة تكون

$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$

أو

$$2(x^2 + 4x + 4) = 0$$

أو

$$2(x + 2)^2 = 0$$

والجذران هما -2 و -2

وبطريقة مماثلة عندما $k = -8$ تصبح المعادلة

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

وهذه المعادلة مكافئة للمعادلة

$$2(x - 2)^2 = 0$$

وجذرا هذه المعادلة هما 2 و 2

قد نحصل من مسألة تطبيقية على معادلة من الدرجة الثانية ذات جذرين حقيقيين احدهما يعطى حلا للمسألة والآخر غير معقول ولا يمكن اعتباره حلا للمسألة .

مثال « ٧ » :

يستطيع طارق شراء عدد من اسهم شركة استثمار بمبلغ 1200 ريالاً وبسعر x ريال

للسهم الواحد . ولو كان سعر كل سهم اقل بمقدار 25 ريالاً لكان باستطاعته شراء4 اسهم اكثر بنفس المبلغ . اوجد قيمة x .

الحل :

عدد الأسهم التي يمكن شراؤها بمبلغ 1200 ريالاً بسعر x ريالا للسهم الواحد يساوي $\frac{1200}{x}$

اذا كلف كل سهم 25 ريالاً اقل اي ان طارق دفع (x - 25) ريالا لكل سهم لكان بامكانه شراء 4 اسهم اكثر ($\frac{1200}{x}$ + 4) بمبلغ 1200 ريالا .

اذا نحصل على المعادلة

$$(x - 25)\left(\frac{1200}{x} + 4\right) = 1200$$

أو

$$(x - 25)\left(\frac{1200 + 4x}{x}\right) = 1200$$

أو

$$\frac{(x - 25)(1200 + 4x)}{x} = 1200$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة في x نحصل على

$$(x - 25)(1200 + 4x) = 1200x$$

والتي يمكن تبسيطها كما يلي:

$$x^2 - 25x - 7500 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$(x - 100)(x + 75) = 0$$

او

$$x = 100 \quad , \quad x = -75$$

الحل x = − 75 غير معقول لذلك يرفض هذا الحل وبالتالي تكون x = 100 .

التحقيق : بسعر 100 ريال للسهم الواحد يستطيع طارق شراء 12 سهماً بمبلغ 1200 ريالاً .

واذا كان سعر السهم الواحد

$$100 - 25 = 75$$

سيكون باستطاعته شراء

$$\frac{1200}{75} = 16$$

سهماً . و

$$16 = 12 + 4$$

تمارين (٣) :

في التمارين من 1 الى 10 حل المعادلة بالتحليل

1. $3x^2 = 48$
2. $2x^2 = 6$
3. $(x - 2)^2 = 9$
4. $x^2 - 5x = 0$
5. $x^2 + 5x = 14$
6. $6x^2 + 11x + 4 = 0$
7. $6x^2 = 1 - x$
8. $3y^2 + 5y + 2 = 0$
9. $2x^2 + x = 15$
10. $18x^2 - 45x + 7 = 0$

في التمارين من 11 الى 16 أضف حداً الى التعبير الجبري للحصول على مربع كامل

11. $y^2 - 10y$
12. $x^2 + 7x$
13. $x^2 + \frac{1}{3}x$
14. $x^2 - \frac{3}{7}x$
15. $x^2 + ax$
16. $x^2 - \frac{3}{5}ax$

في التمارين 17 الى 24 حل كلاً من المعادلات باكمال المربع

17. $x^2 + 2x - 5 = 0$
18. $x^2 + 7x + 5 = 0$
19. $3\tau^2 - 7\tau - 3 = 0$
20. $2\upsilon^2 - 11\upsilon + 12 = 0$
21. $\omega^2 - 13\omega - 3 = 0$
22. $4x^2 - x - 2 = 0$
23. $3y^2 + 7y + 3 = 0$
24. $2x^2 + 3x + 4 = 0$

في التمارين من 25 الى 36 حل كلا من المعادلات باستخدام القانون

25. $x^2 - 2x - 3 = 0$
26. $x^2 - 7x = 0$
27. $4y^2 - 3y = -4$
28. $x^2 + 1 = 3x$
29. $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1 = 0$
30. $\frac{v^2 - 3}{2} + \frac{v}{4} - 1 = 0$
31. $x^2 - 3x + 5 = 0$
32. $(2x + 1)^2 = 3x^2 - 1$
33. $(x + 1)^2 = 5$
34. $x(x - 2) = 6$
35. $4x(x - 1) + 1 = 9$
36. $3x^2 + x = -4$

في التمارين من 37 الى 42 اوجد المقدار المميز لتحديد طبيعة الجذر (لا تحل المعادلات) .

37. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
38. $3x^2 - 4x + 3 = 0$
39. $2y^2 = 6 - y$
40. $9y^2 + 24y + 16 = 0$
41. $17x - 12 = 6x^2$
42. $5x^2 - 7x + 3 = 0$

في التمارين من 43 الى 48 اوجد قيمة K التي تجعل للمعادلة حلين متساويين

43. $x^2 - kx + 3 = 0$
44. $x^2 + 3kx + 8 = 0$
45. $x^2 - 2kx - 3 = 0$
46. $x^2 + 7x + k = 0$
47. $x^2 + k^2 = 2(k + 1)x$
48. $kx^2 + (k + 3)x + 4 = 0$

(٣ ـ ٤) معادلات خاصة :

تعلمنا حتى الآن كيفية حل معادلات خطية ومعادلات من الدرجة الثانية . وفي هذا الفصل سوف ندرس بعض انـواع المعـادلات التـي يمـكن تحويلهـا الى معـادلات معروفة . اذا كانت معادلة تحتوي على جذور او أسس نسبية فمن المفيد رفع طرفي المعادلة الى أس عدد صحيح موجب . ولكن عند اجراء ذلك يجب استخدام النظرية الآتية :

نظرية (١) :

اذا كان كل من E_1 و E_2 مقادير في متغير x وكان n اي عدد صحيح موجب فان فئة حلول

$$(1) \qquad E_1 = E_2$$

هي فئة جزئية لفئة حلول المعادلة

$$(2) \qquad E_1^n = E_2^n$$

هذه النظرية هي نتيجة مباشرة من الحقيقة التي تقول انه اذا كان كل من a و b عدداً حقيقياً وكان $a = b$ فان $a^n = b^n$. نلفت نظر القارىء هنا ان نظرية (2) لا تقـول ان معادلة (1) ومعادلة (2) متكافئتان .

مثلا اعتبر المعادلة

$$(3) \qquad x = 4$$

اذا ربعنا الطرفين فنحصل على

$$(4) \qquad x^2 = 16$$

فئة حلول المعادلة (4) هي $\{ -4, 4 \}$ وفئة حلـول المعادلـة (3) هي $\{4\}$. وهـذه النتيجة تتفق مع النظرية . ولكن -4 هو حل للمعادلة (4) ولكن ليس حلا للمعادلة(3) جذور من هذا النوع تسمى جذوراً طارئة extraneous . وبما ان هناك امكانية لظهور جذور طارئة ، لذا يجب عند استخدام نظرية (2) اهمال جذور المعادلة الجديدة التي لا تحقق المعادلة الأصلية .

مثال « ١ » :

حل المعادلة الآتية :

$$\sqrt{2x-1} = 1 + \sqrt{x-1} \qquad (5)$$

الحل :

بتربيع الطرفين نحصل على

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (1 + \sqrt{x-1})^2$$

أو

$$2x - 1 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1$$

أو

$$x - 1 = 2\sqrt{x-1} \qquad (6)$$

بتربيع الطرفين نحصل على

$$(x-1)^2 = 4(x-1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4x - 4$$

أو

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

او

$$(x-5)(x-1) = 0$$

$x = 1$ أو $x = 5$

العددان 1 ، 5 يحققان المعادلة . اذا فئة الحلول هي $\{1, 5\}$

مثال « ٢ » :

حل المعادلة الآتية :

$$\sqrt{2x+1} = x - 1 \qquad (7)$$

الحل :

بتربيع الطرفين نحصل على

$$2x + 1 = (x-1)^2$$
$$= x^2 - 2x + 1$$

أو

$$x^2 - 4x = 0$$

أو

$$x(x-4) = 0 \qquad (8)$$

للمعادلة (8) فئة الحلول $\{0,4\}$ فئة الحلول للمعادلة (7) هي فئة جزئية من فئة الحلول للمعادلة (8) بالتحقيق في المعادلة (7) نجد ان 0 لا يحقق المعادلة بينما (4) يحققها . وعليه فان فئة الحلول للمعادلة (7) هي $\{4\}$.

فيما يلي بعض الأمثلة على معادلات يمكن تحويلها الى معادلات من الدرجة الثانية بالتعويض . مثال ذلك المعادلات

$$x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

و

$$x^{2/3} - 6x^{1/3} + 8 = 0$$

مثال « ٣ » :

حل المعادلة الآتية :

$$x - 6\sqrt{x} + 8 = 0 \qquad (9)$$

الحل :

افرض ان $\sqrt{x} = u$ اذا $x = u^2$ وعليه فالمعادلة المعطاة تتحول الى

$$u^2 - 6u + 8 = 0$$

أو

$$(u-4)(u-2) = 0$$

أو

$$u = 4 \quad , \quad u = 2$$

اذا

$$\sqrt{x} = 4 \quad , \quad \sqrt{x} = 2$$
$$x = 16 \quad , \quad x = 4$$

مثال « ٤ » :

حل المعادلة

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 5(x + \frac{1}{x}) = -6 \qquad (10)$$

الحل :

افرض ان $u = x + \frac{1}{x}$

اذا

$$u^2 = (x + \frac{1}{x})^2$$

بالتعويض في (10) نحصل على

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

حل هذه المعادلة يعطى

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$(u - 2)(u - 3) = 0$$

$u - 2 = 0$ أو $u - 3 = 0$

أي ان

$u = 2$ أو $u = 3$

ولكن

$$u = x + \frac{1}{x}$$

وعليه فان

$$x + \frac{1}{x} = 2 \text{ or } x + \frac{1}{x} = 3$$

يضرب طرفي كل من المعادلتين السابقتين في x نحصل على

$x^2 - 2x + 1 = 0$ أو $x^2 - 3x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$ أو $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x = 1$ أو $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ أو $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

يمكن التحقق من ان فئة الحلول هي :

$$\left\{1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

مثال « ٥ » حل المعادلة

$$(11) \quad x^{2/3} - 7x^{1/3} + 6 = 0$$

الحل :

افرض ان $U = x^{1/3}$ اذاً $x^{2/3} = u^2$ بالتعويض نحصل على المعادلة

$$u^2 - 7u + 6 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$u^2 - 7u + 6 = 0$$
$$(u - 6)(u - 1) = 0$$

وعليه

$u = 6$ أو $u = 1$

$x^{1/3} = 6$ أو $x^{1/3} = 1$

أو

$x = 216$ أو $x = 1$

كل من هذين الحلين يحقق المعادلة . وعليه فان فئة الحلول هي $\{1, 216\}$

مثال « ٦ » :

حل المعادلة

$$(12) \quad |3x - 7| = 5$$

الحل :

حسب تعريف القيمة المطلقة عندنا :

$3x - 7 = 5$ أو $3x - 7 = -5$

$3x = 12$ أو $3x = 2$

$x = 4$ أو $x = \frac{2}{3}$

اذاً فئة حلول المعادلة (12) هي $\{4, \frac{2}{3}\}$.

تمارين (٤) :

في التمارين من 1 الى 32 اوجد فئة الحلول

1. $\sqrt{x-2} = 3$
2. $\sqrt[3]{x+2} = -3$
3. $\sqrt{3x^2-1} = 2$
4. $\sqrt{x-2} = \sqrt{3-x}$
5. $\sqrt{1-2x} + \sqrt{3x-4} = 0$
6. $\sqrt[3]{2x+1} + 4 = 6$
7. $\sqrt{3x-4} + 1 = x$
8. $2\sqrt{y+6} - y - 3 = 0$
9. $\sqrt{3x+7} + 3 = \sqrt{8x+25}$
10. $\sqrt{2x+1} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3x+4}$
11. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5}$
12. $\sqrt{\sqrt{3x-2} - 2\sqrt{4x+1}} = 2$
13. $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$
14. $(x+1) + 2\sqrt{x+1} - 15 = 0$
15. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
16. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
17. $(x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 3 = 0$
18. $x^{-2} - x^{-1} - 42 = 0$
19. $x^{1/2} + 3 - 4x^{-1/2} = 0$
20. $\left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{x^2-3}{x}\right) + 8 = 0$
21. $\left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{3x+1}\right) + 6 = 0$
22. $2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 7\left(\frac{x}{1+x}\right) + 3 = 0$
23. $\frac{2}{(y+1)^2} - \frac{7}{y+1} + 6 = 0$
24. $2 - 5(y+1)^{-1} - 3(y+1)^{-2} = 0$
25. $|2x-3| = 3$
26. $|x+1| = -2$

27. $|2 - 7x| = 5$

28. $|x^2| = 4$

29. $|x^2 - 2x| = 1$

30. $|x^2 - 2x| = 15$

31. $|x - 2| = |3x - 4|$

32. $|5x + 7| = |3 - 2x|$

(٣ ـ ٥) حل المتباينات :

سبق وعرفنا في الباب الثاني مفهوم المتباينات $a<b$ ، $b<a$ حيث ان كلا من a ، b عدد حقيقي . سوف ندرس في هذا الفصل متباينات تحتوي متغيرات . كما هي الحالة في المعادلات ، المتباينة في متغير x قد تكون صحيحة لقيم لـ x وقد لا تكون صحيحة لقيم اخرى لـ x ، مثلا ، المتباينة :

$$2x + 5 < x + 8$$

صحيحة لـ $x = 1$ ولكنها غير صحيحة لـ $x = 6$. في هذه الحالة 1 احد حلول المتباينة . اذا كانت متباينة في x صحيحة لـ $x = a$ فتسمى a حلا للمتباينة . كما هي الحالة في المعادلات نستبدل المتباينة بسلسلة متباينات متكافئة بحيث تكون فئة حلول المتباينة الأخيرة واضحة . لنستعيد الى اذهاننا بعض خواص المتباينات التي سوف تساعدنا في حل المتباينات .

اذا كان كل من a ، b ، c عدداً حقيقياً فان

(I) $a < b$ اذا واذا فقط $a + c < b + c$

(II) اذا كان $c > 0$ فان $a < b$ اذا واذا فقط $ac < bc$

(III) اذا كان $c < 0$ فان $a < b$ اذا واذا فقط $ac > bc$

مثال « ١ » :

حل المتباينة الآتية :

$$2x + 5 < x + 8$$

الحل :

باستخدام الخاصية (I) نحصل على

$$2x + 5 - 5 < x + 8 - 5$$

أو

$$2x < x + 3$$

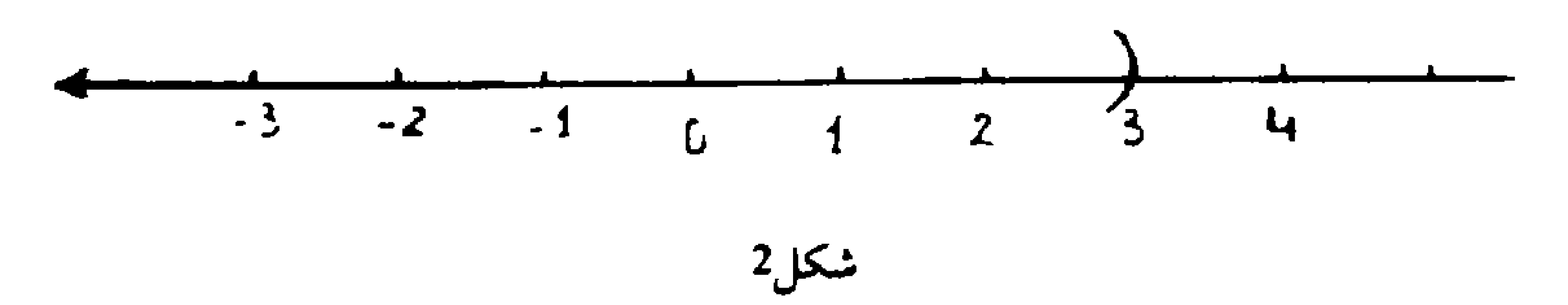
باستخدام الخاصية (I) مرة اخرى نحصل على

$$2x - x < x + 3 - x$$

أو

$$x < 3$$

إذاً فئة حلول المتباينة هي $\{x / x < 3\}$. يمكن كتابة فئة الحلول كذلك بصيغة فترة $(-\infty , 3)$ الرسم البياني للمتباينة هو في شكل (2) .



شكل2

مثال « ٢ » :

حل المتباينة المركبة

$$3 \leq 4x - 7 < 9 \quad (2)$$

الحل :

باضافة 7 الى كل جهة من جهات المتباينة نحصل على

$$10 \leq 4x < 16 \quad (3)$$

بضرب كل جهة من جهات المتباينة (3) في $\frac{1}{4}$ نحصل على

$$\frac{10}{4} \leq x < \frac{16}{4}$$

أو

$$\frac{5}{2} \leq x < 4 \quad (4)$$

بما ان كلا من الخطوات السابقة قابلة للعكس فالمتباينة (4) مكافئة للمتباينة (2)
وعليه فان فئة حلول المتباينة المعطاة هي

$$\{x / \frac{5}{2} \leq x < 4\}$$

والتي هي الفترة $[\frac{5}{2}, 4)$

مثال « ٣ » :

حل المتباينة

$$x^2 + x < 2 \quad (5)$$

الحل :

المتباينات التالية متكافئة

$$x^2 + x < 2$$
$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$(6) \qquad (x + 2)(x - 1) < 0$$

العدد الحقيقي x ينتمي الى فئة حلول المتباينة (5) اذا وفقط اذا كان حاصل الضرب $(x+2)(x-1)$ سالباً . ولكن المقدار $(x+2)(x-1)$ سالب اذا كانت اشارتا $(x+2)$ و$(x-1)$ مختلفتين. أي أحدهما موجب والآخر سالب. لنعتبر الآن إشارة x+2 يكون العامل $x + 2 > 0$ عندها $x > -2$ ويكون $x+2 < 0$ عندها $x < -2$. نوضح هذه الحقيقة في شكل (3)

Sign of(X-1) _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ + + + + + + + + + + +

Sign of(X+2)_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ +

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

بالمثل يكون العامل $x - 1 > 0$ عندها $x > 1$ ويكون $x - 1 < 0$ عندها $x < 1$. هذه الحقيقة كذلك موضحة في شكل (3) . ونرى من شكل (3) ان للعاملين اشارتين مختلفتين في الفترة $(-2, 1)$ وعليه فان فئة حلول المتباينة (5) هي الفترة $(-2,1)$.

مثال « ٤ » :

حل المتباينة

$$(7) \qquad \frac{x}{x-4} > 5 \quad , \quad x \neq 4$$

الحل :

بما ان $x \neq 4$ أي $x - 4 \neq 0$ إذاً $(x - 4)^2 > 0$ وعليه فضرب طرفي المتباينة (7) في العدد الموجب $(x-4)^2$ لا يغير المتباينة ونحصل على

$$(8) \qquad x(x - 4) > 5(x - 4)^2$$

ونحصل من هذه المتباينة على المتباينات المتكافئة التالية

$$x^2 - 4x > 5(x^2 - 8x + 16)$$

$$0 > 4x^2 - 36x + 80$$

$$0 > x^2 - 9x + 20$$

$$x^2 - 9x + 20 < 0$$

$$(x - 5)(x - 4) < 0.$$

وكما رأينا في مثال (3) يمكن ان نبين ان فئة حلول هذه المتباينة هي $\{x \mid 4 < x < 5\}$

مثال « ٥ » :

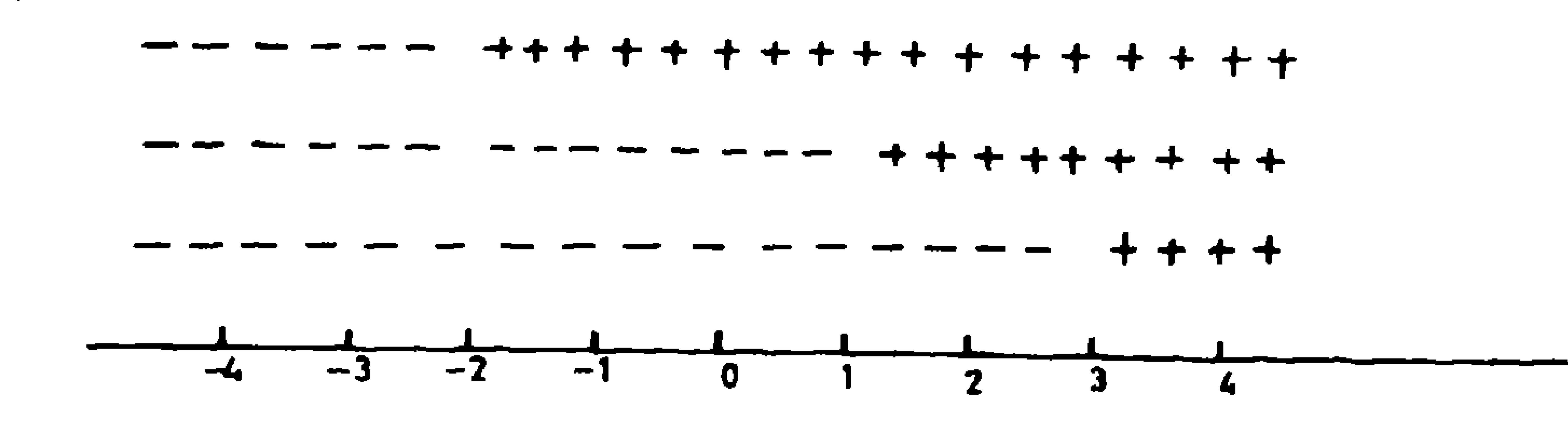
حل المتباينة

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0 \qquad (9)$$

الحل :

يكون العدد x في فئة حلول المتباينة في احدى الحالات الآتية :

جميع العوامل $x + 2$ و $x - 1$ و $x - 3$ موجبة او عاملان سالبان والثالث موجب . كما رأينا في مثال (3) سوف نبين اشارة كل من العوامل الثلاثة في شكل (4) ، ثم نجد من الشكل فئة الحلول . نرى ان جميع العوامل الثلاثة موجبة في الفترة $(3, +\infty)$ وعاملان سالبان والثالث موجب في الفترة $(-2, 1)$ وعليه فان فئة حلول المتباينة (٩) هي $(-2, 1) \cup (3, \infty)$



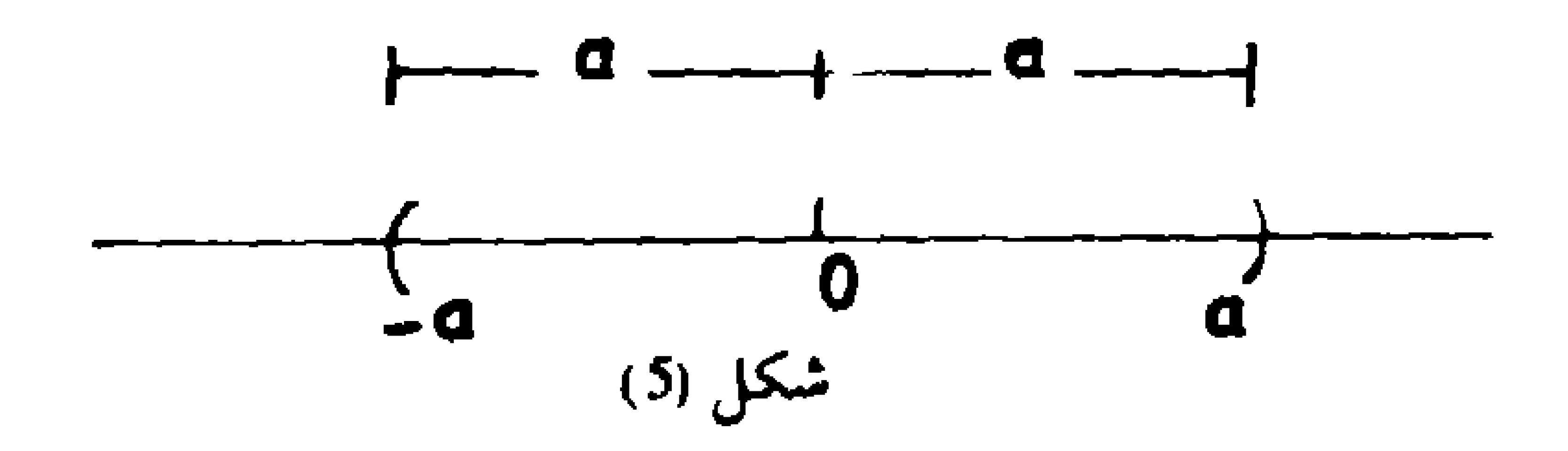
للمتباينات التي تحتوي قيماً مطلقة اهمية في التفاضل والتكامل ، وقبل دراسة مثل هذه المتباينات نحتاج النظرية التالية :

نظرية « ٣ » :

اذا كان كل من x ، a عدداً حقيقياً و $a > 0$ فان $|x| < a$ اذا وفقـط اذا كان $a > x > -a$.

التفسير الهندسي :

$|x| < a$ تعني ان المسافة بين x ونقطة الأصل اقل من a من الوحدات . او بعبارة اخرى ان x واقعة في حدود a من الوحدات من نقطة الأصل (انظر شكل (5)) .



شكل (5)

$x \in (-a,a)$ مكافىء للمتباينة

أي أن

$$-a < x < a$$

$$\{x \,/\, |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$$

برهان النظرية :

يتطلب البرهان جزأين

(١) افرض ان $|x| < a$

نرغب ان نثبت ان $-a < x < a$.

بما ان $|x| < a$ اذا $-|x| > -a$ (لماذا؟) . ومن تعريف القيمة المطلقة عندنا $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

اذا

$$-a < -|x| \leqslant x \leqslant |x| < a$$

وبالخاصية الانتقالية نستنتج ان

$$-a < x < a$$

ثانياً : افرض ان $-a < x < a$ يجب ان نثبت ان $|x| < a$ نعتبر هنا حالتين $x \geq 0$ ، $x < 0$

الحالة الأولى :

$x \geq o$. في هذه الحالة $|x| = x$ وبما ان $x < a$ نستنتج ان $|x| < a$.

الحالة الثانية :

$x < o$ ، في هذه الحالة $|x| = -x$ بما ان $-a < x$ لدينا $-x < a$ بما ان $|x| = -x$ نستنتج ان $|x| < a$. اذا في كلتا الحالتين اذا كان $-a < x < a$ فان $|x| < a$ بنفس الطريقة يمكن اثبات النظرية الآتية :

نظرية « ٤ » :

اذا كان كل من a, x عدداً حقيقياً وكان $a > o$ فان $|x| > a$ اذا وفقط اذا $x > a$ أو $x < -a$

وباستخدام لغة الفئات فان نظرية (٤) تعني

$$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x > a\} \cup \{x \mid x < -a\}$$

النظريتان السابقتان صحيحتان اذا استبدلنا $<$ ، $>$ بـ $\leq$ ، $\geq$ على التوالي .

مثال « ٦ » :

حل المتباينة الآتية

$$(10) \quad |2x - 3| < 7$$

الحل :

نستخدم النظرية (٣) لتحويل المتباينة (10) الى المتباينة المكافئة

$$(11) \quad -7 < 2x - 3 < 7$$

وهذه مكافئة الى

$$-7 + 3 < 2x < 7 + 3$$

أو

$$-4 < 2x < 10$$

أو

$$-2 < x < 5$$

إذاً فئة حلول المتباينة (10) هي

$$\{x \mid -2 < x < 5\} = (-2, 5)$$

مثال « ٧ » :

حل المتباينة الآتية

$$(12) \quad |3x + 4| \geq 5$$

ثم مثل المتباينة باستخدام الفئات

الحل :

من نظرية « ٤ » نستنتج ان

$3x + 4 \geq 5$ أو $3x + 4 \leq -5$

وعليه فان

$3x \geq 1$ أو $3x \leq -9$

أو

$x \geq \frac{1}{3}$ أو $x \leq -3$

وعليه فان

$$\{x / |3x + 4| \geq 5\} = \{x / x \leq -3\} \cup \{x / x \geq \frac{1}{3}\}$$
$$= (-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$$

تمارين (٥) :

في التمارين من 1 الى 32 حل المتباينة ثم ارسم الرسم البياني لكل منها

1. $3x < 7$
2. $3x - 3 > 5$
3. $2x + 3 < 15 + 4x$
4. $3 - 4x < 15$
5. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \leqslant 2$
6. $\frac{x - 7x}{3} \leqslant 0$
7. $\frac{x-3}{2} \leqslant \frac{x}{3} + 1$
8. $x - \frac{2x}{3} \geqslant 1 - 2x$
9. $1 \leqslant 3x - 8 \leqslant 5$
10. $2 < 3x - 4 \leqslant 5$
11. $x^2 < 3x$
12. $x^2 - 2x - 3 > 0$
13. $\frac{1}{x} < 1$
14. $2 - \frac{1}{x} < x$
15. $\frac{x}{x-2} < 3$
16. $\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0$
17. $\frac{2x}{3x-4} - 2 \geqslant 0$
18. $1 - \frac{1}{1+x} < 0$
19. $(x + 2)(x + 3) < 0$
20. $(x - 2)(x - 1)(x - \frac{1}{2}) \leqslant 0$
21. $(x + 1)^2 < 0$
22. $\frac{1}{(x-3)^2} < 1$
23. $(2x - 3)^2(5x + 7)^2 < 0$
24. $x(x - 1)(x - 2) < 0$
25. $| 2x + 5 | \leqslant 9$
26. $| 3x - 4 | < 8$
27. $| 4 - 5x | \leqslant 6$
28. $| 2x + 3 | > 7$.
29. $| x^2 - 1 | < 5$
30. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)} > 0$
31. $\frac{(2x-1)(3x+4)}{x^2-1} \leqslant 0$
32. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8} < 0$.

تمارين عامة

1. حل كلاً من المعادلات التالية بالنسبة الى x

(a) $3x - 7 = 5$

(b) $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{x-1}$

(c) $\frac{3x}{4} = 5 - \frac{2x}{3}$

(d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x} + \frac{1}{4}$

(e) $\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{5}{x^2-4}$

(f) $x = \frac{3}{4}axt^2 - xy + 4$

2. حل كلاً من المتباينات التالية بالنسبة الى x ثم وضحّ الحل على خط الأعداد الحقيقية .

(a) $2x - 5 < 11$

(b) $3x + \frac{1}{2} > -7$

(c) $-2x + 1 < 3$

(d) $-3x + 4 > -5$

(e) $2x - 3 < -3x + 7$

(f) $2(-3x + 1) < 3(x - 5)$

(g) $3x - 2(3x - 1) > 8x - 3 + 5(1 - 2x)$

3. حل كلاً مما يأتي بالنسبة الى x

(a) $|x| = 5$

(b) $|-2x| = -4$

(c) $|3x - 4| = 8$

(d) $|1 - 2x| = 7$

4. حل كلاً مما يأتي بالنسبة الى x ثم بين فئة الحلول على خط الأعداد الحقيقية

(a) $|x| < 3$

(b) $|-x| < 5$

(c) $|x| > 1$

(d) $|x| > \frac{3}{2}$

(e) $|x - 1| < 3$

(f) $|3x - 2| > 7$

(g) $|1 - 2x| \leqslant 7$

(h) $|2x - 3| \geqslant 5$

5. حل كلاً من المعادلات التالية

(a) $x^2 - 3x = 0$ (b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

(c) $2x^2 - 7x + 1 = 0$ (d) $y^2 + 3y - 1 = 0$

(e) $2x^2 - x + 3 = 0$ (f) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

6. اوجد قيمة K التي تجعل للمعادلة جذرين متساويين .

(a) $x^2 + kx + 1 = 0$ (b) $x^2 - \quad 3x + k = 0$

(c) $kx^2 + 4x + 1 = 0$ (d) $x^2 + k^2 = 2(k-1)x$

7. حل كلاً مما يأتي :

(a) $\sqrt{1-x} = 2 + \sqrt{2x+1}$

(b) $3x - 1 = 2x - 1$

(c) $x + 6\sqrt{x+8} = 0$

(d) $(x - \frac{1}{x})^2 - 10(x - \frac{1}{x}) + 21 = 0$

(e) $x^{2/5} - 3x^{1/5} + 2 = 0$

8. حل كلاً من المتباينات التالية :

(a) $-3 < 2x - 3 < 5$ (b) $5 \leq 1 - 2x < 7$

(c) $x(x-1) > 0$ (d) $(x-2)(x+1) < 0$

(e) $\frac{x+1}{x-2} > 0$ (f) $(x-1)(x+2)(x-3) < 0$

(g) $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} > 0$ (h) $\frac{x+1}{(x-2)(x-5)} \geq 0$

9. مجموع عددين يساوي 42 وأحدهما ضعف الآخر اوجد العددين ؟

10. رجل عمره الآن 40 سنة وولده عمره 11 سنة . بعد كم سنة يصبح عمر الرجل ضعف عمر ابنه ؟

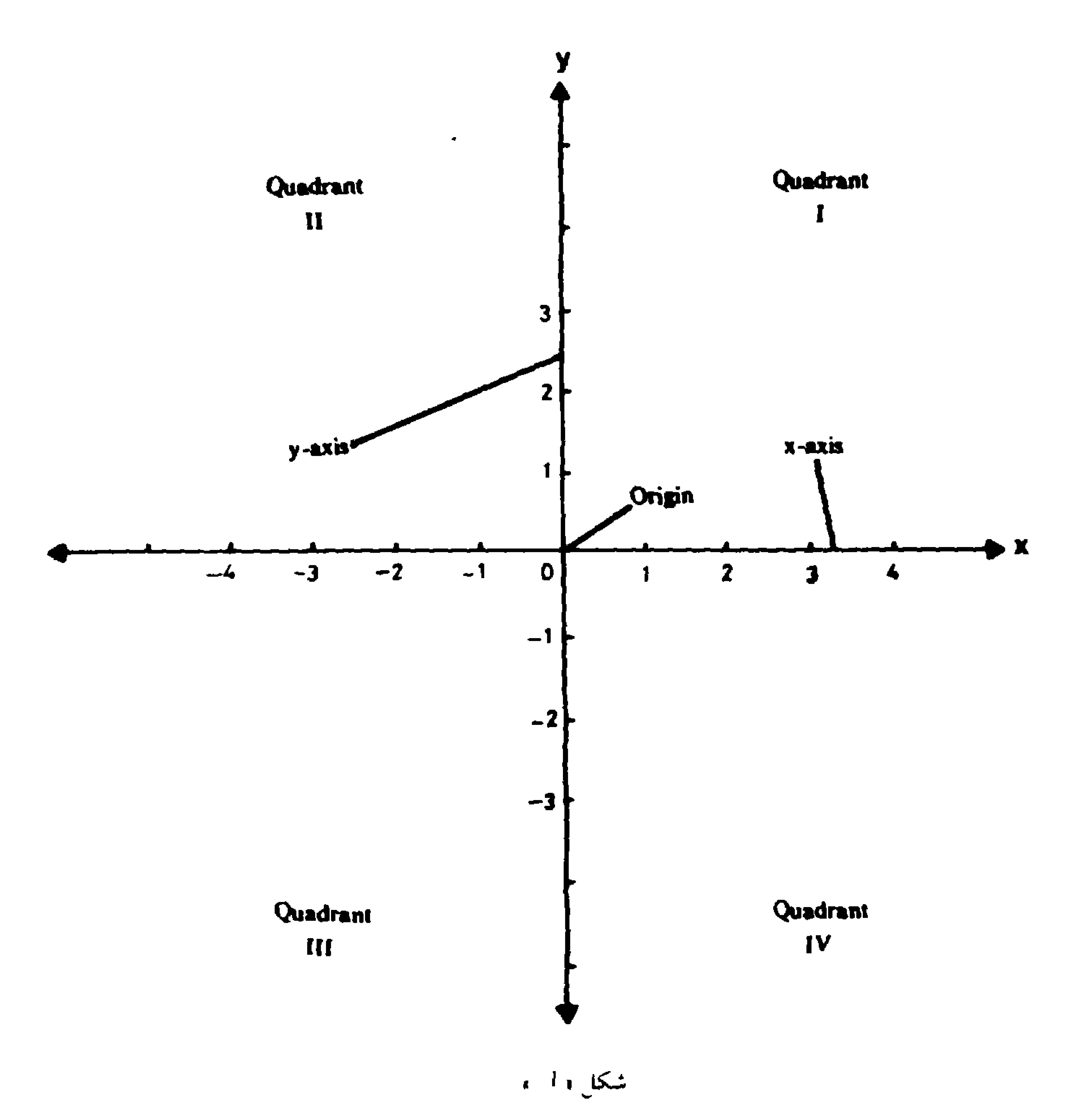
الباب الرابع

المعادلات والمتباينات الخطيّة

يتناول هذا الباب دراسة نظام المحاور الكارتيزية تمهيداً لدراسة العلاقات والدوال والمتباينات . وسنهتم في هذا الباب بصورة خاصة بدراسة أنظمة المعادلات الخطية ، وأنظمة المتباينات الخطية . وينتهي هذا الباب بدراسة أولية للبرمجة الخطية كتطبيق لأنظمة المتباينات الخطية .

(٤ ـ ١) نظم المحاور الكارتيزية Cartesian Coordinate Systems :

ينشأ نظام المحاور الكارتيزية (شكل 1) بوضع خط رأسي وخط افقي على مستوى بحيث تنطبق نقطتا الصفر . وتسمى نقطة تقاطع الخطين بنقطة الأصل Origin . ويسمى الخط الأفقي بالمحور x (x - axis) والخط الرأسي بالمحور y (y – axis) . ويقسم هذان الخطان المستوى الى اربعة اجزاء تسمى الأرباع الأربعة (quadrants) . وترمز الحروف الرومانية بالشكل « I » الى رقم كل ربع .



شكل « 1 »

تناظر النقط على المستوى الكارتيزي ازواج الأعداد الحقيقية . وتكتب الأزواج في الصورة (x,y) مثل (2,3) أو $(0 ,-\frac{1}{2})$. ويسمى العدد الأول بالاحداثي x (x-coordinate or abscissa). والعدد الثاني يطلق عليه الاحداثي y(y – coordinate) أو (Cordinate) . على سبيل المثال ، (2,3) لها احداثي x يساوي 2 واحداثي y يساوي 3

وتوقع النقطة (a,b) على المحور الكارتيزي بايجاد موقع a على المحور x ثم الانتقال رأسياً عدد من الوحدات قدرها |b| الى اعلى اذا كانت b موجبة والى اسفل اذا كانت b سالبة .

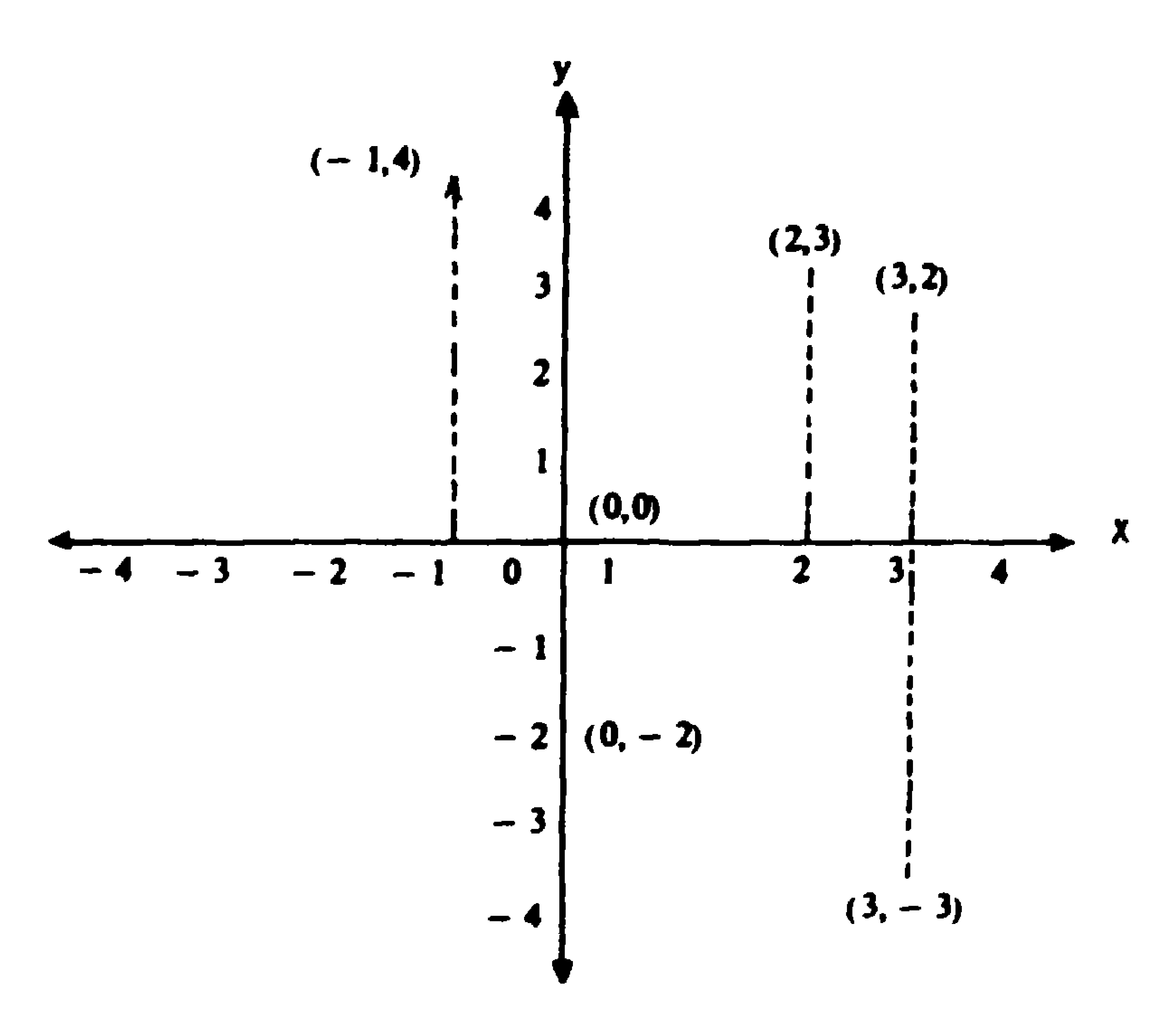
مثال « ١ » :

وقع النقط التالية على نظام المحاور الكارتيزية

(2,3), (0,0), (– 1,4) , (0, – 2) , (3,2) and (3, – 3)

الحل :

انظر الشكل (2)



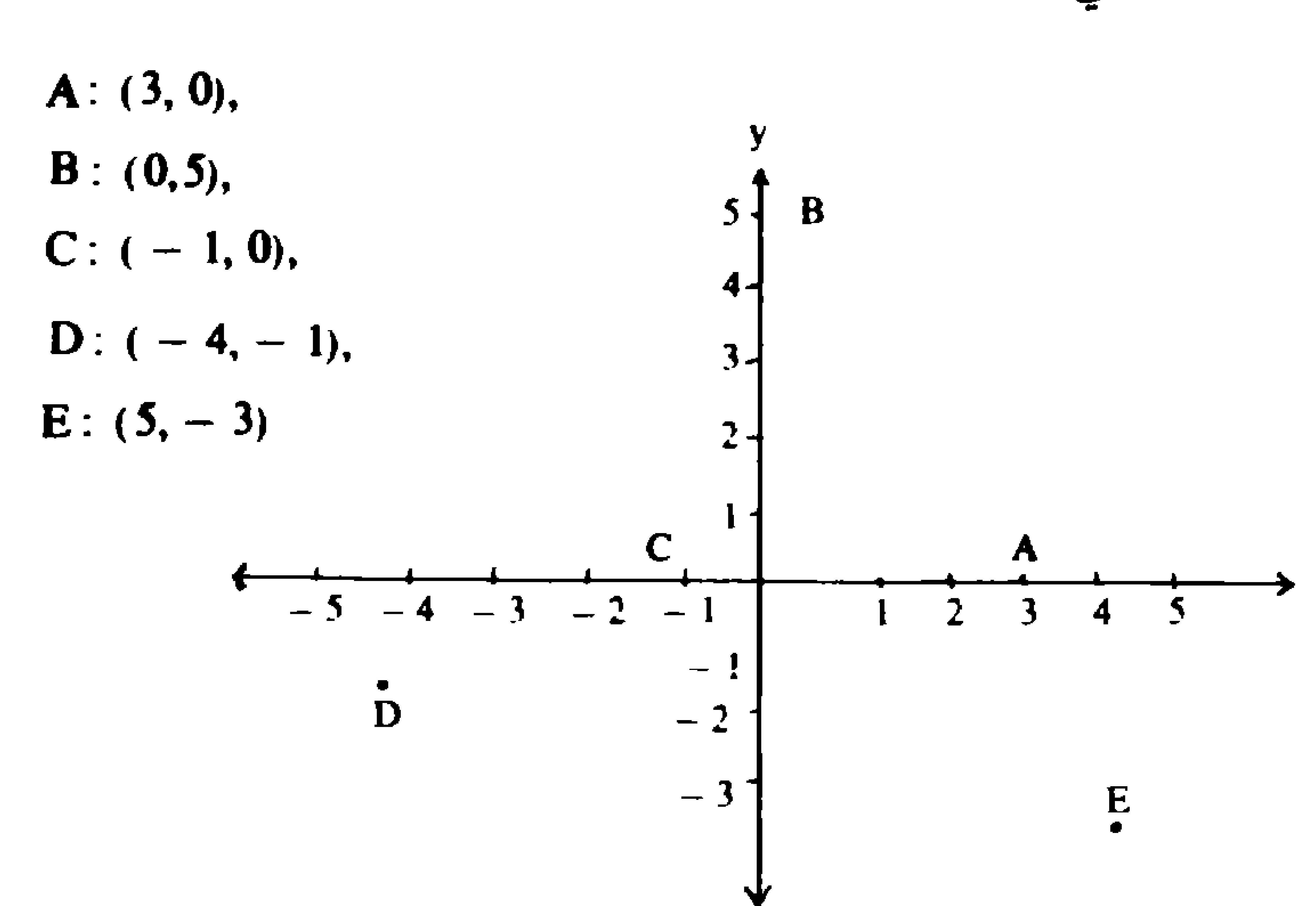
شكل (2)

مثال « ٢ » :

حدد الأزواجِ المرتبة (x,y) للنقط A, B, C, D, E

الحل :

الاحداثيات هي



(٤ ـ ٢) معادلات الخط المستقيم :

المعادلة من الدرجة الأولى في متغيرين هي معادلة يمكن كتابتها في الصورة

$$ax + by = c$$

حيث a, b, c هي ثوابت . وتسمى مثل هذه المعادلات بالمعادلات الخطية في متغيرين . وتشير الكلمة « خطية » الى شكل مجموعة النقط (x,y) للمعادلة والتي تكون خطاً مستقيماً .

مثال « ٣ » :

ارسم المعادلة

$$x - 2y = 4$$

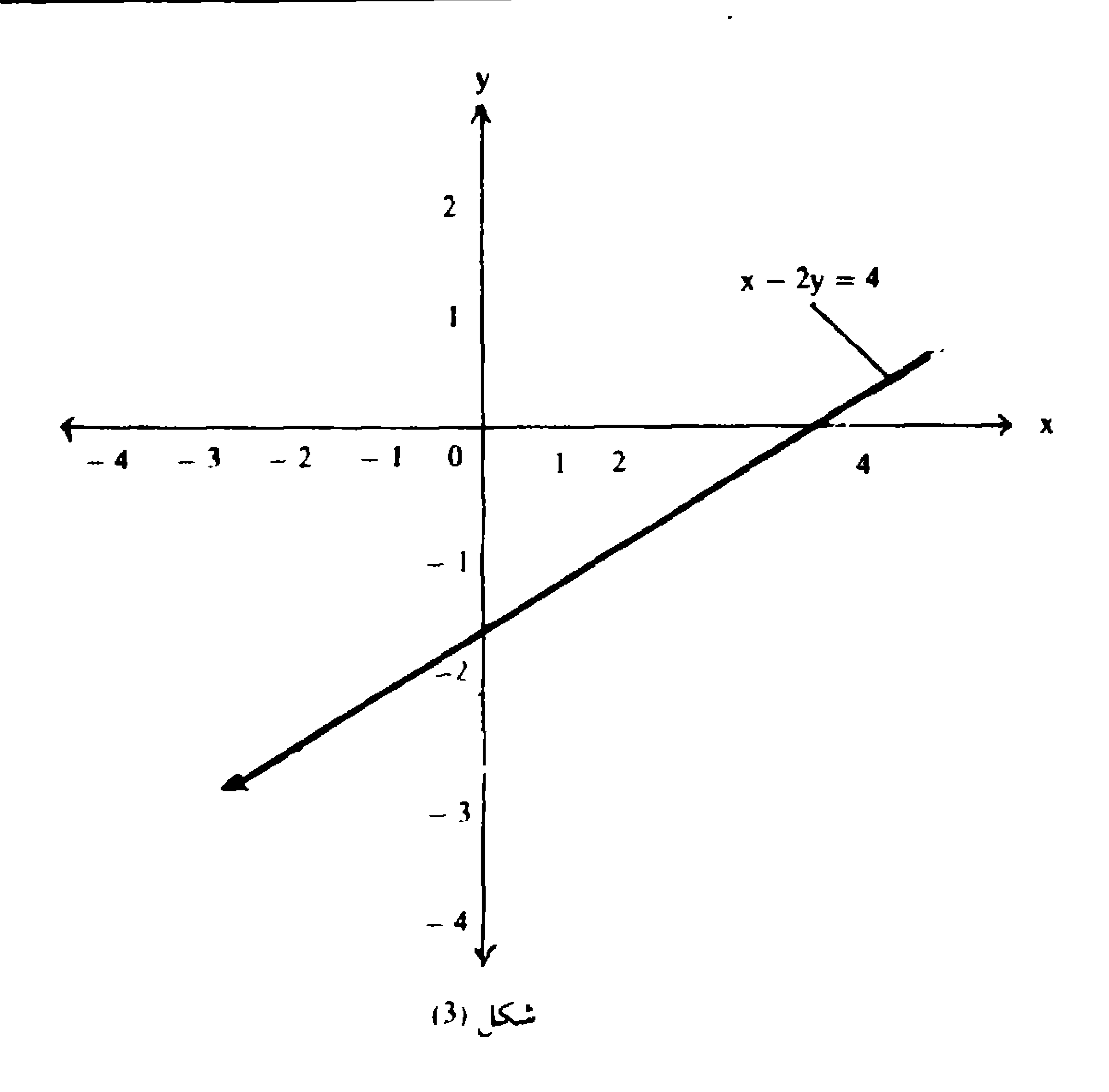
الحل :

أولا ، نحدد ٣ نقط تحقق المعادلة ، ولتكن عند $x = 0, 2, 4$

x	y
0	$-2 \rightarrow (0, -2)$
2	$-1 \rightarrow (2, -1)$
4	$0 \rightarrow (4, 0)$

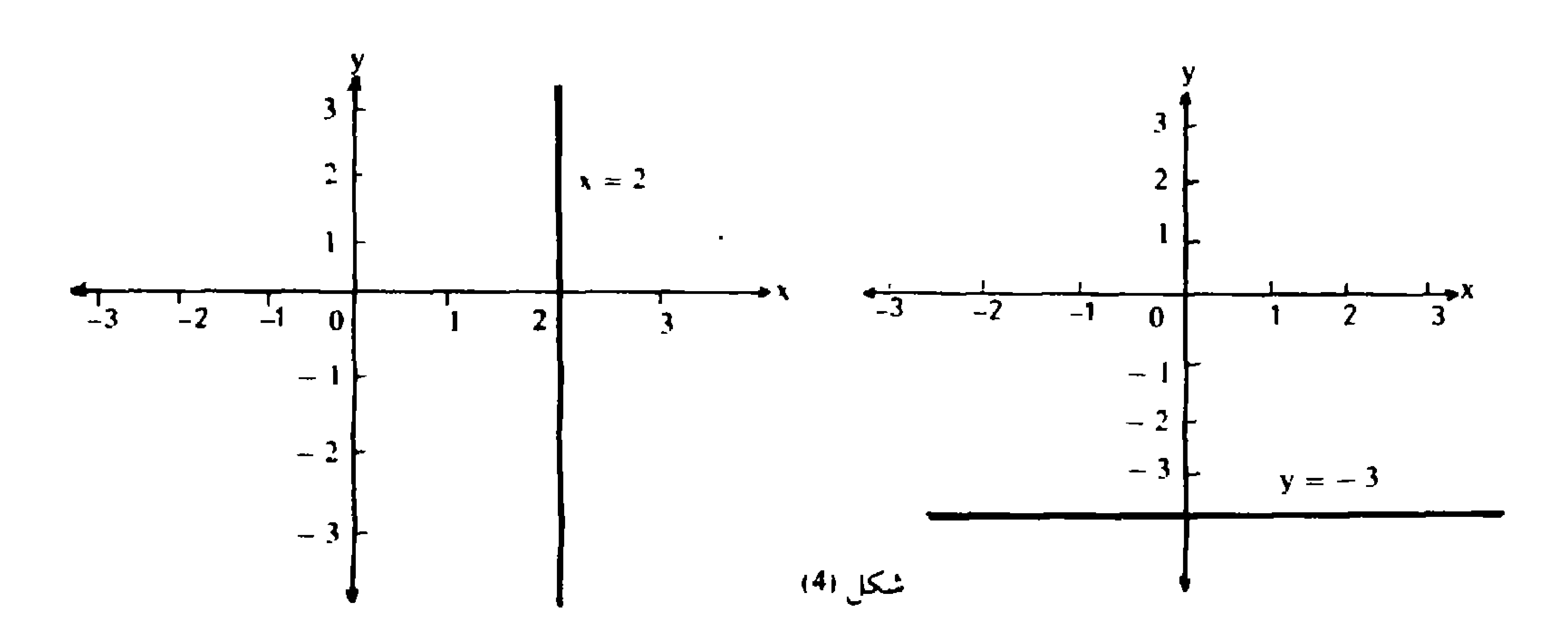
وعادة ، نأخذ قيمة x (أو y) ونحدد بعد ذلك قيمة y (أو x) من المعادلة . على سبيل المثال $x = 0$ تعطى $0 - 2y = 4$ وبالتالي فان $y = -2$. ويتم تحديد الخط بنقطتين ، ولتلافي الوقوع في اخطاء حسابية يمكن اخذ اكثر من نقطتين في الاعتبار (اذا كانت النقاط الثلاث ليست على خط واحد ، فيجب مراجعة الحسابات) .

ويبين الشكل (3) الخط المستقيم ممتداً من الجهتين .



شكل (3)

ويبين الشكل (4) الخطين $x = 2$ ، $y = -3$. ويمكن ملاحظة ان النقطة $(2, -3)$ هي نقطة تقاطع الخط $x = 2$ مع الخط $y = -3$



شكل (4)

ويمكن كتابة الخطوط التي ليست على الشكل x تساوي ثابت ، في الصورة التالية

$$y = mx + b$$

حيث m,b ثابتان . اذا كانت $x = 0$ فان

$$y = m.0 + b = b$$

والتي تعني ان النقطة (0,b) تقع على المستقيم . وحيث ان (0,b) هي النقطة التي يقطع فيها الخط المحور y فانها تسمى التقاطع مع y (y – intercept) ويسمى m بميل (slope) الخط . اذا كانت (x_2, y_2) ، (x_1, y_1) نقطتين على الخط

$$y = mx + b$$

$$y_1 = mx_1 + b$$

$$y_2 = mx_2 + b$$

وبطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على :

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b)$$

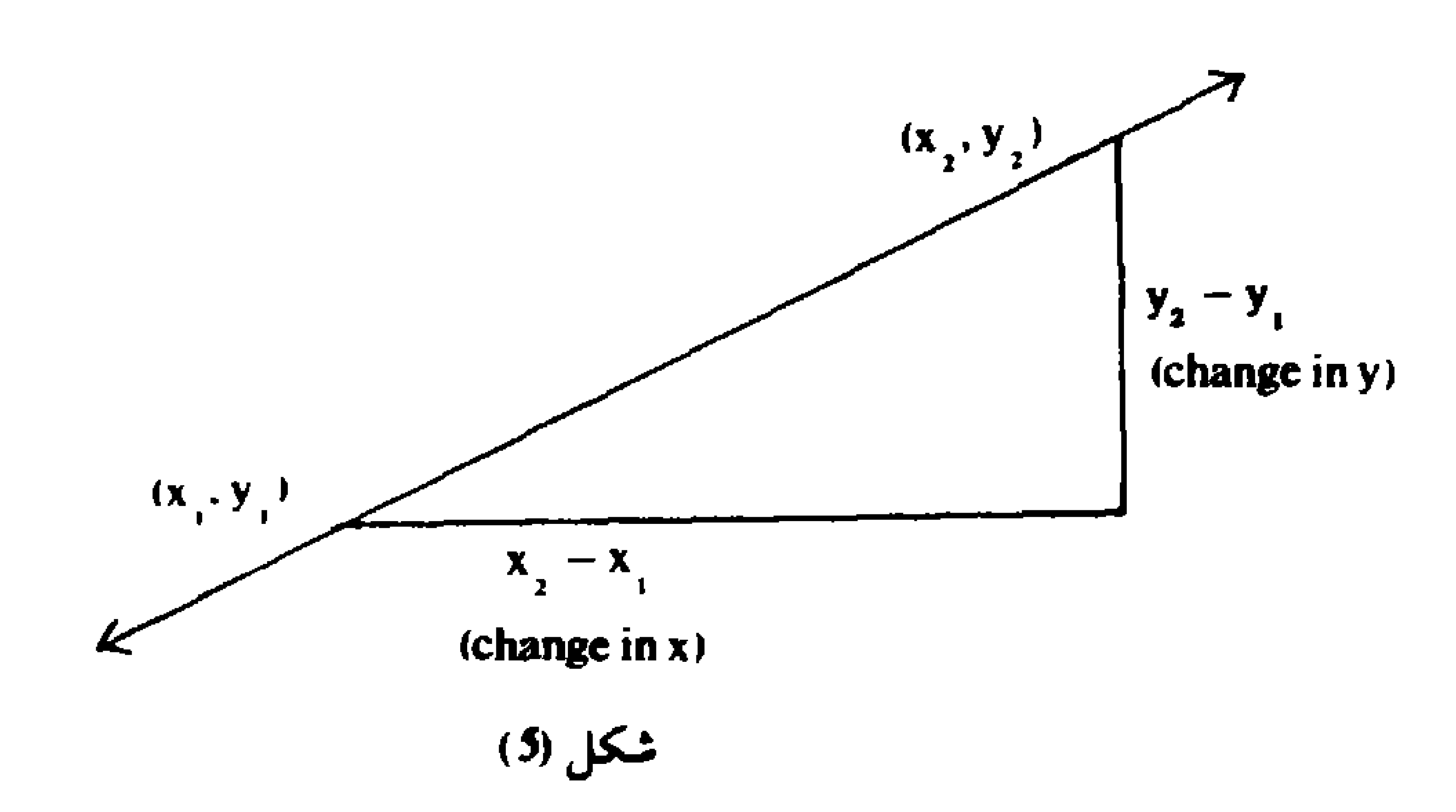
$$y_2 - y_1 = mx_2 + b - mx_1 - b$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

(أنظر شكل (5)) . وبالتالي فان ميل الخط يمكن تعريفه كما يلي :

$$\text{الميل} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x}$$



شكل (5)

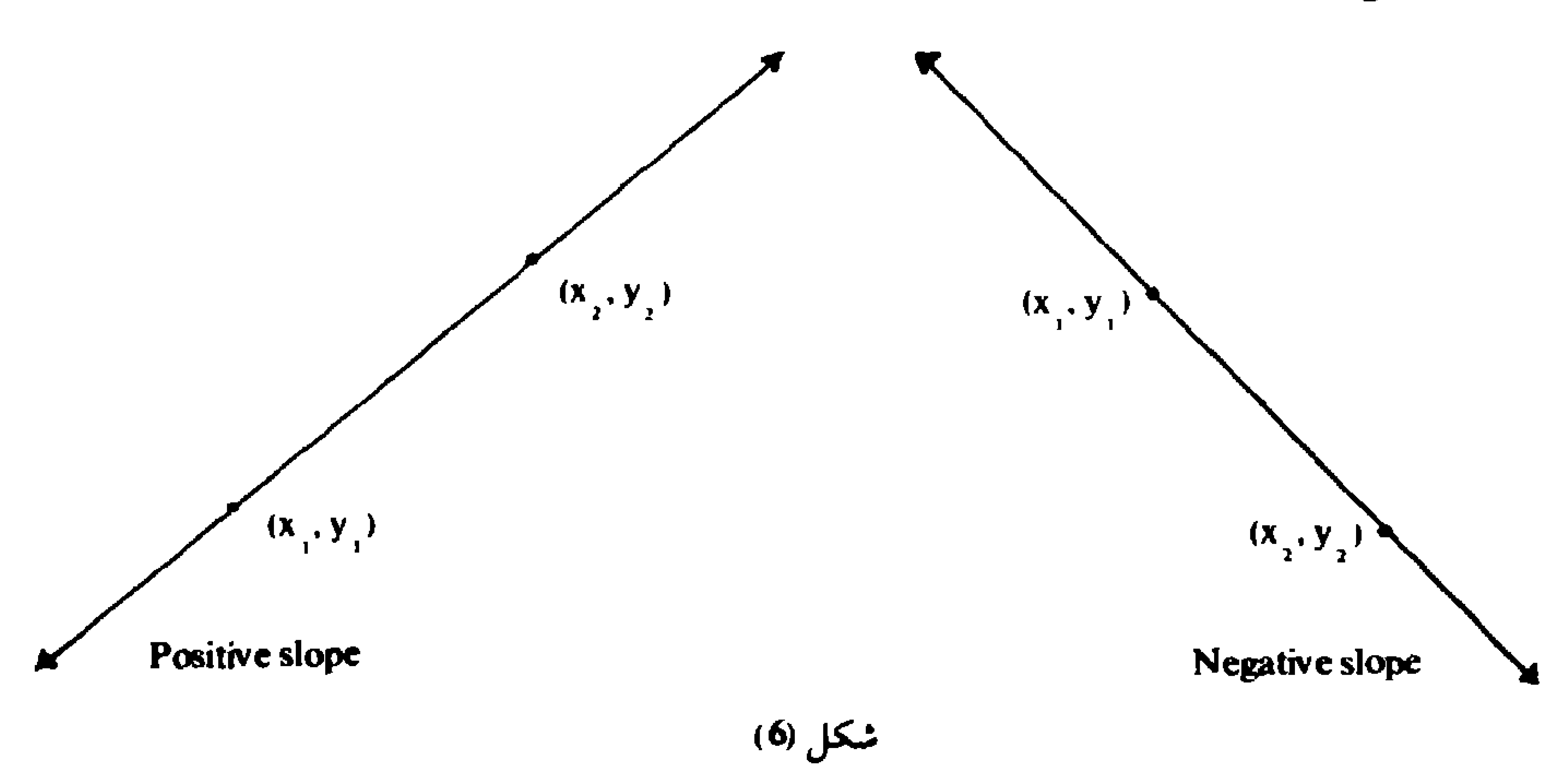
ومن السهل ان نرى انه اذا كان الخط يرتفع من اليسار الى اليمين ، فان ميله يكون موجباً ، لأن :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{التغير الموجب في } y}{\text{التغير الموجب في } x}$$

واذا كان الخط ينزل من اليسار الى اليمين فان ميله يكون سالباً لأن :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{التغير السالب في } y}{\text{التغير الموجب في } x}$$

(انظر شكل (6))



شكل (6)

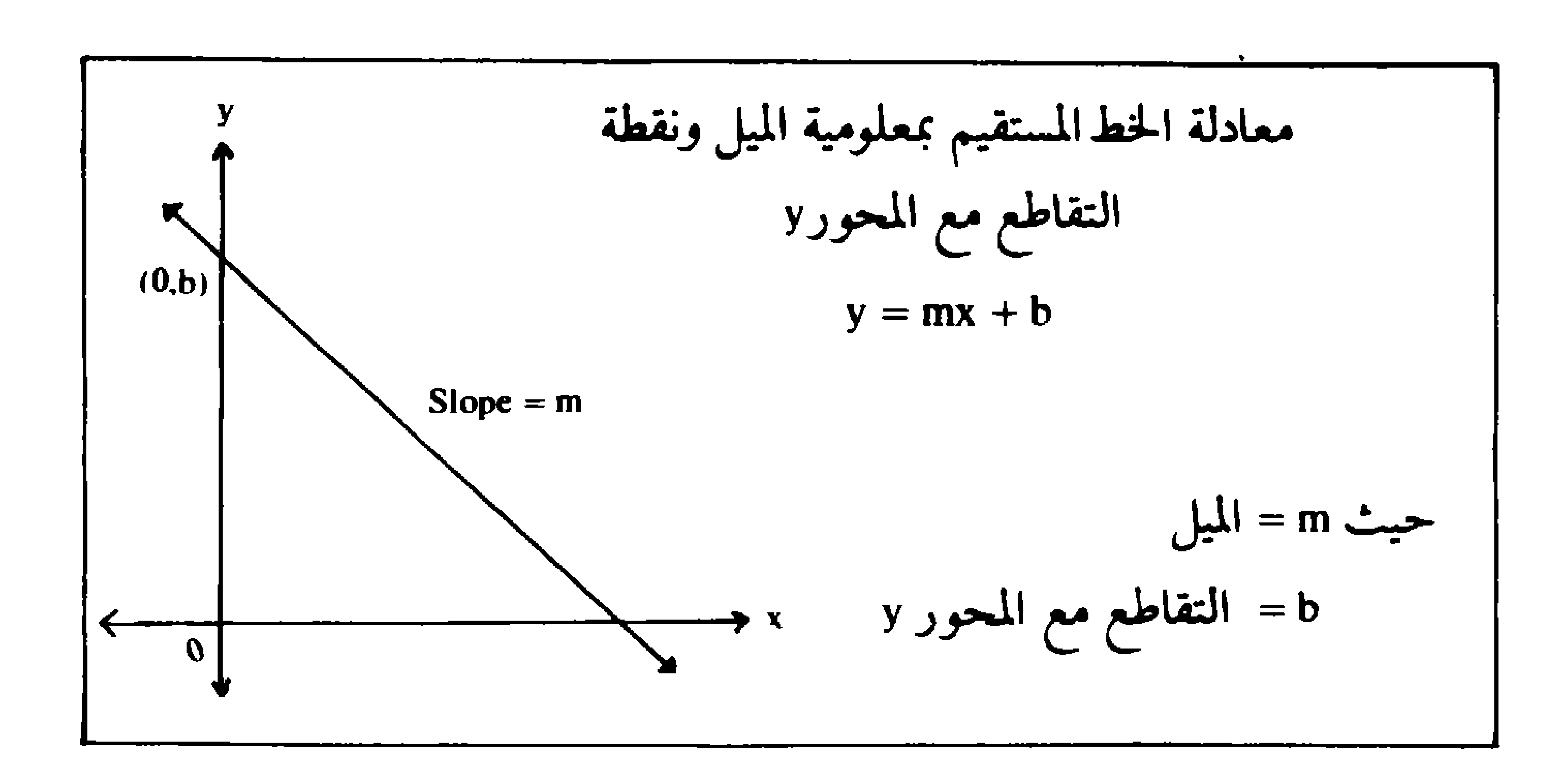
وللخط الأفقي

$$m = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \frac{\text{صفر}}{\text{التغير في } x} = \text{صفر}$$

وبالتالي فان الميل يساوي صفراً . وللخط الرأسي نجد ان الميل غير محدد ، حيث ان الميل يساوي :

$$m = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{صفر}}$$

ومن المعروف ان القسمة على صفر غير محددة .



مثال « ٤ » :

(أ) حدد الميل والتقاطع مع المحور y للخط

$$2x - 3y = 6$$

(ب) ما هي معادلة الخط الذي ميله 3 وتقاطعه مع المحور y يساوي $\frac{6}{7}$

الحل :

(أ) تكتب المعادلة مرة اخرى في الصورة :

$$2x - 3y = 6$$

$$-3y = -2x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

ومن تلك الصورة يمكن بسهولة معرفة ان

الميل = $\frac{2}{3}$

والتقاطع مع المحور y = -2

(ب) اذا كانت $m = 3$ ، $b = \frac{6}{7}$ فان معادلة الخط في الصورة $y = mx + b$ تكون كما يلي $y = 3x + \frac{6}{7}$

وبما انه يمكن ان تكون المعلومات عن الخط معطاة في صور اخرى ، فانه يلزم معرفة الصور الأخرى لمعادلة الخط .

اذا اعطينا الميل m لخط ونقطة واحدة (x_1 , y_1) على الخط ، فانه يمكن الرجوع الى تعريف الميل كنسبة للتغير في الاحداثيات y الى التغير في الاحداثيات x . اذا كانت(x,y) هي نقطة عامة على الخط وكانت (x_1 , y_1) هي نقطة خاصة معلومة على الخط ، اذن :

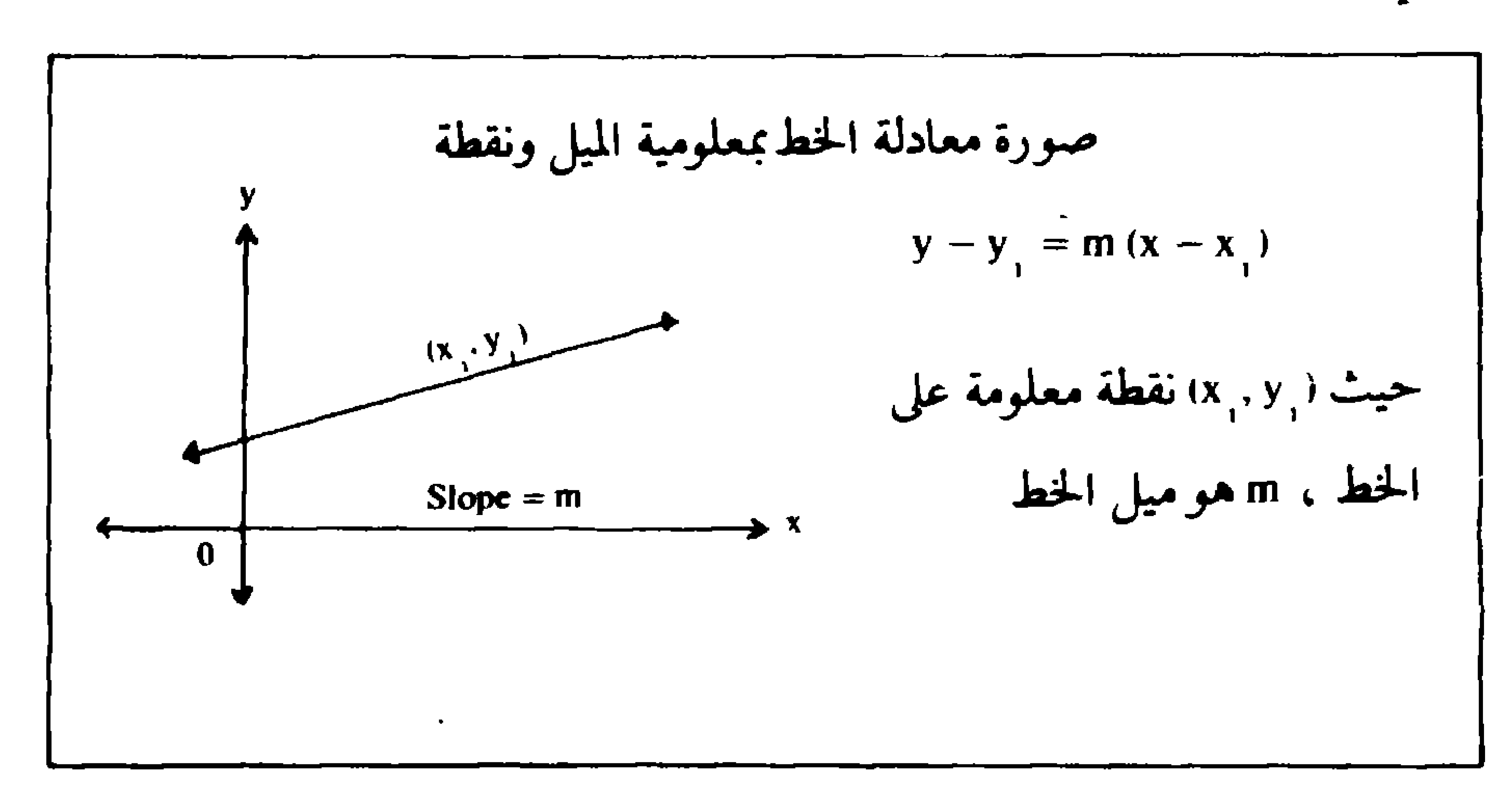
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \text{ أو } y - y_1 = m(x - x_1)$$

ويعطي ذلك صورة مفيدة لمعادلة الخط

صورة معادلة الخط بمعلومية الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث (x_1 , y_1) نقطة معلومة على الخط ، m هو ميل الخط



مثال « ٥ » :

ما هي معادلة الخط الذي ميله = 7 − ويمر بالنقطة (6,2) .

الحل :

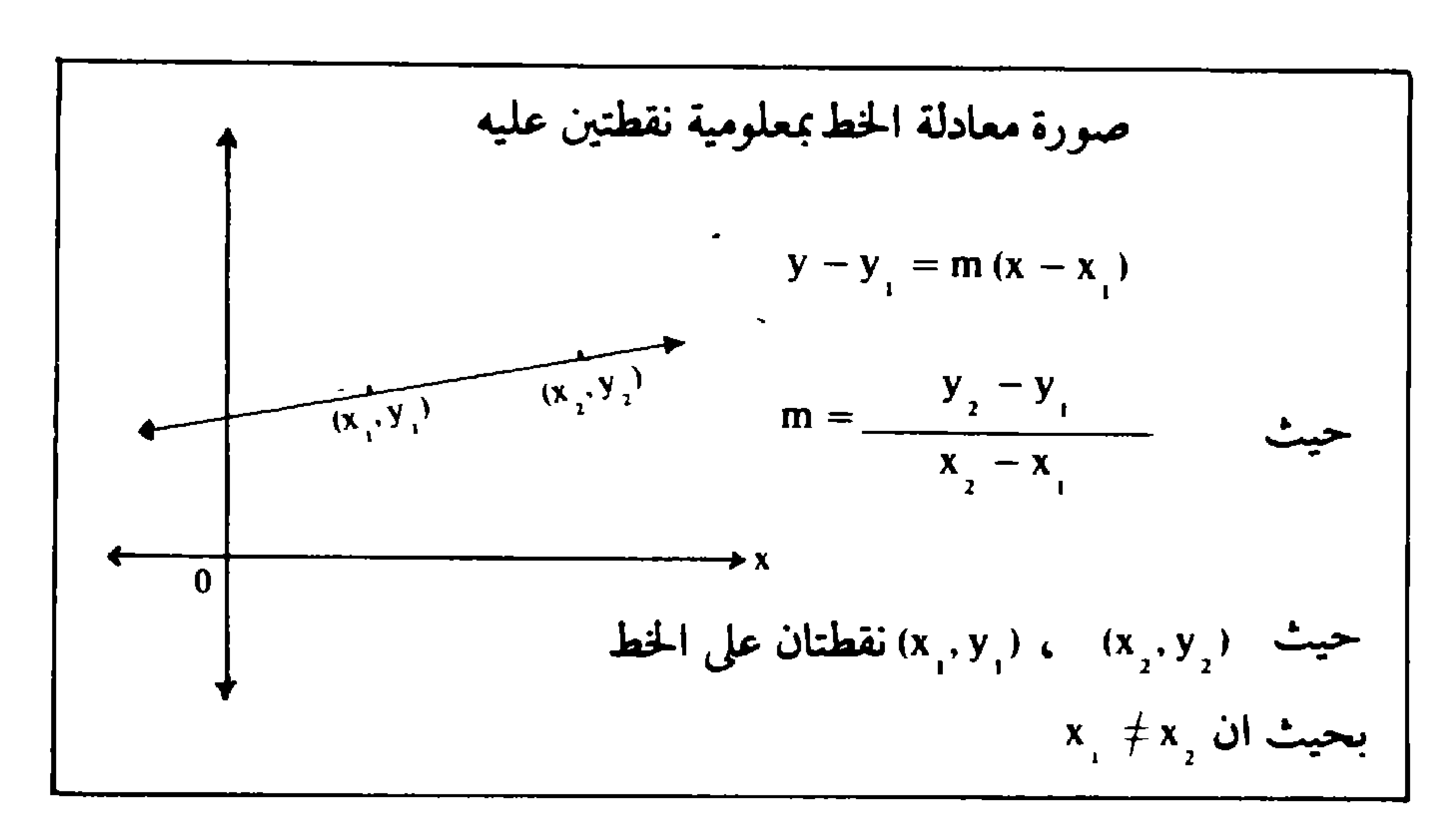
باستخدام صورة معادلة الخط بمعلومية الميل ونقطه نحصل على

$$y - 2 = -7(x - 6)$$

$$y - 2 = -7x + 42$$

$$y = -7x + 44$$

وعند التعامل مع بيانات خاصة بمواقف عملية ، فانه يكون لدينا عادة زوجان من النقط (x_2, y_2) و (x_1, y_1) . فاذا كانت العلاقة خطية ، يمكن لنا حساب الميل للخط ثم نحصل على معادلة الخط كما يلي :



مثال « ٦ » :

تقوم احدى شركات التسويق بالدعاية في الصحف لنوع جديد من المنتجات . والعلاقة بين تكلفة الاعلانات وحجم المبيعات للمنتج الجديد هي علاقة خطية . فاذا كان تكلفة الاعلان 500 ريال وحجم المبيعات المناظر 100 واذا كانت التكلفة للاعلان 1200 ريال فان حجم المبيعات يزيد الى 240 . فما هي المبيعات المتوقعة الناتجة عن تكلفة اعلان 750 ريال .

الحل :

افترض ان x تساوي كلفة الاعلان بالريالات وان y تساوي حجم المبيعات . اذن (1200, 240) و (500, 100) هما نقطتان على الخط ، وبالتالي نحصل على المعادلة التالية .

$$y - 100 = \frac{240 - 100}{1200 - 500}(x - 500)$$

$$y - 100 = \frac{140}{700}(x - 500)$$

$$y - 100 = \frac{1}{5}(x - 500)$$

$$y = \frac{1}{5} x - 100 + 100$$

$$y = \frac{1}{5} x$$

وبتطبيق المعادلة السابقة عند $x = 750$ نحصل على

$$y = \frac{1}{5} . 750 = 150$$

أي ان حجم المبيعات يساوي 150

مثال « ٧ » :

حدد معادلة الخط الموازي للخط

$$y = 4x + 9$$

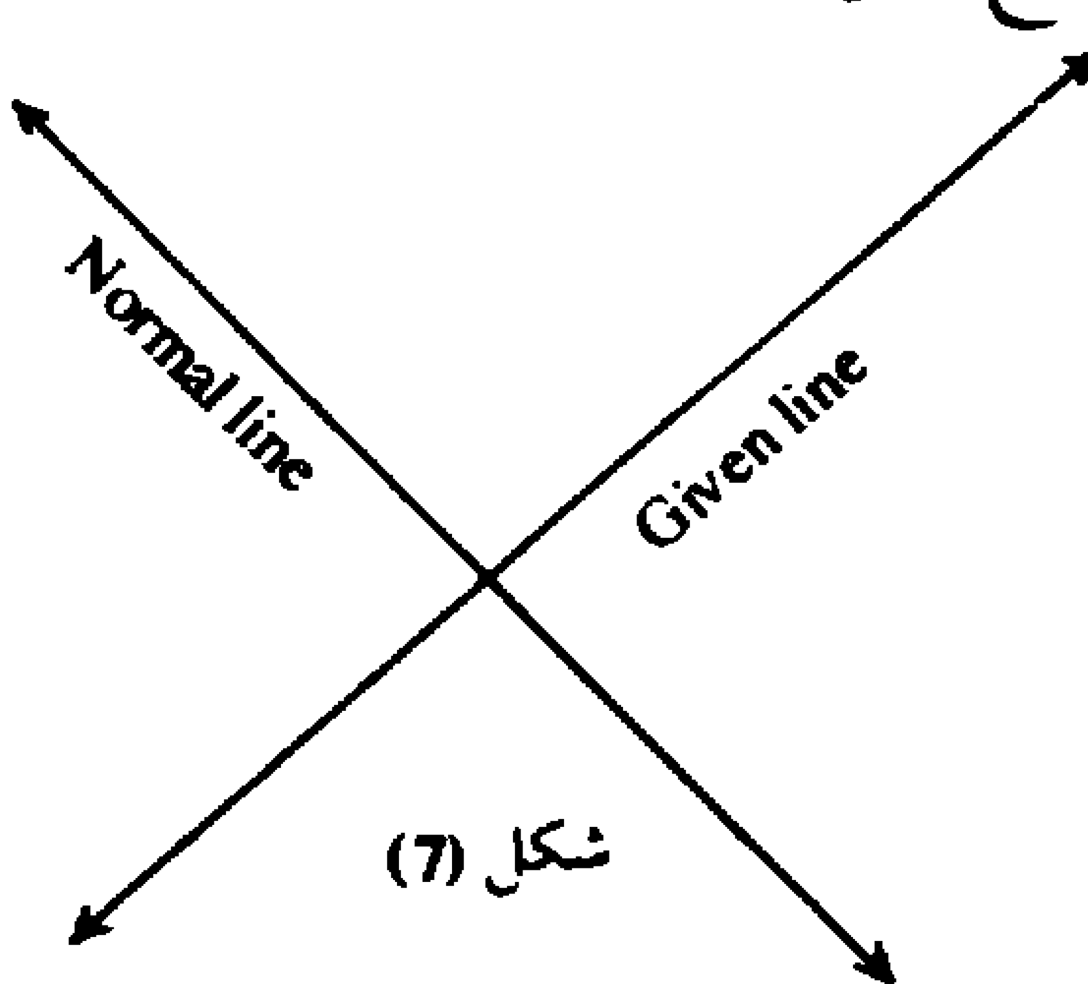
ويمر بالنقطة $(5, -1)$.

الحل :

ميل الخط الجديد يساوي 4 حيث ان ميل الخط الأصلي يساوي 4 . وبما اننا نعرف نقطة على الخط فاننا يمكن ان نستخدم صورة معادلة الخط بمعلومية نقطة والميل كما يلي :

$$y - (-1) = 4(x - 5)$$
$$y + 1 = 4x - 20$$
$$y = 4x - 21$$

الخط العمودي (normal line) على خط معلوم (انظر الشكل (7)) يكون ميله يساوي مقلوب الميل الأول مع تغيير الاشارة .



شكل (7)

مثال « ٨ » :

أوجد معادلة الخط العمودي على الخط

$$2x + 3y = 6$$

عند النقطة (3,0)

الحل :

يجب اولا ايجاد ميل الخط $2x + 3y = 6$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

أي ان الميل $-\frac{2}{3}$. وبالتالي فان ميل الخط العمودي يساوي $\frac{3}{2}$.
وباستخدام معادلة الخط بمعلومية الميل والنقطة (3,0) نحصل على :

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

تمارين (١) :

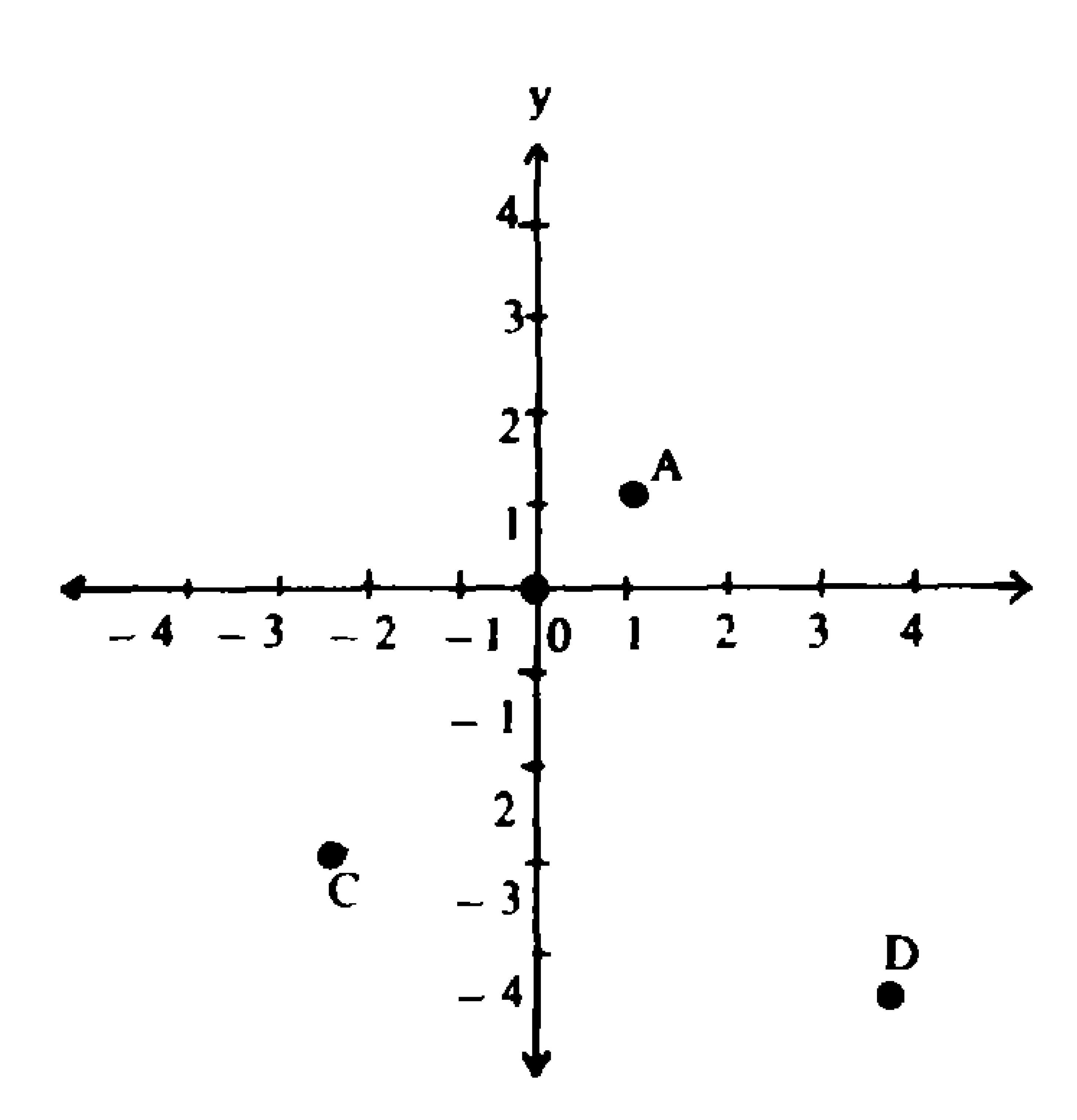
1. وقّع النقط التالية على نظام المحاور الكرتيزية

$$(1,5), (0, -3), (-4, 3), (7, 0)$$

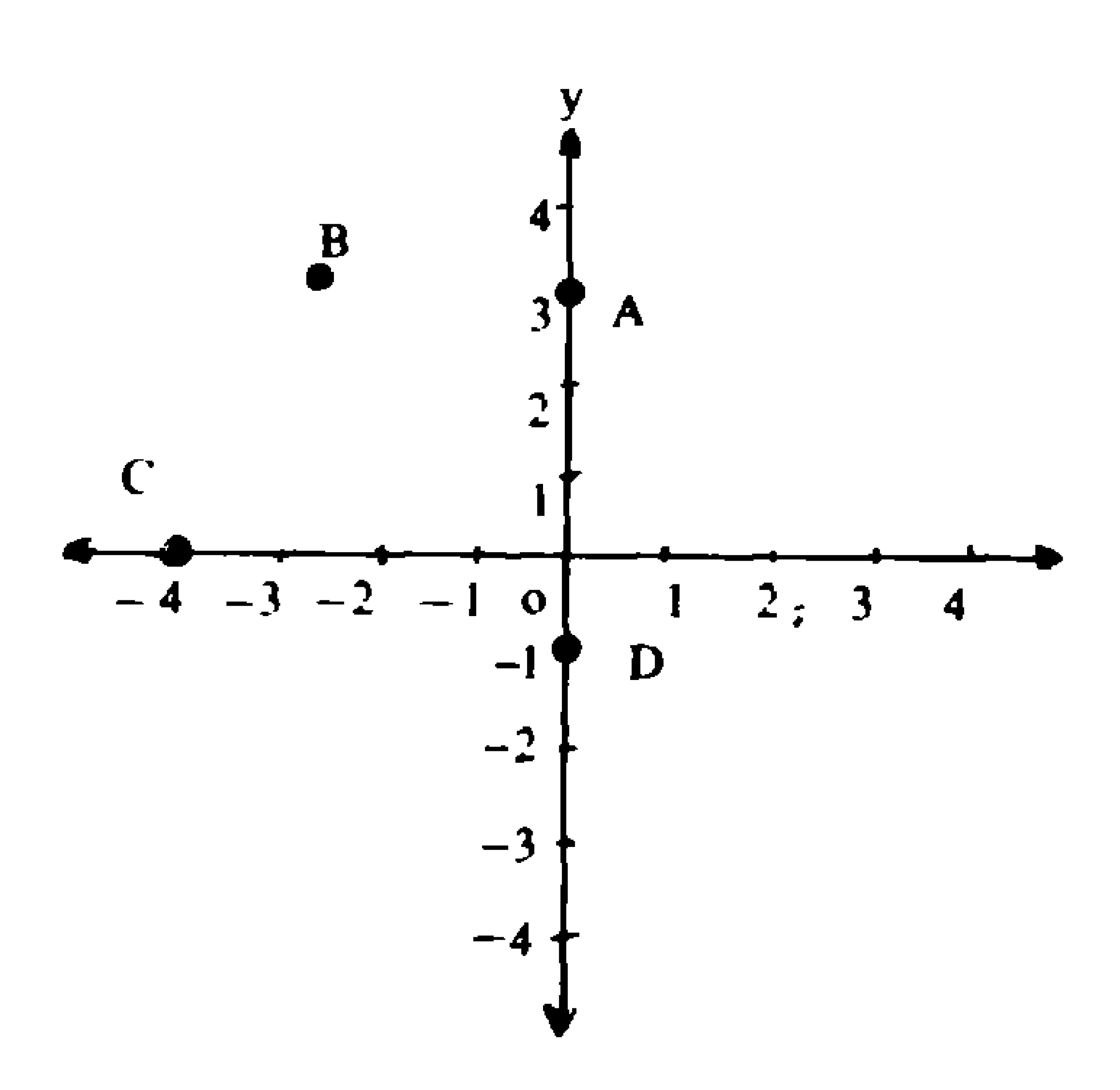
2. وقّع النقط التالية على نظام المحاور الكرتيزية

$$(-2, 0), (2, -5)', (0,3\frac{1}{2}), (-6, -2)$$

3. حدد الأزواجِ المرتبة المناظرة للنقط A, B, C, D الموضحة على نظام المحاور الكرتيزية :



4. حدد الأزواجِ المرتبة المناظرة للنقط A, B, C, D الموضحة على نظـام المحـاور الكرتيزية :



في المسائل من (14 – 5) ارسم الخط المستقيم الذي تمثله كل فئة

5. $\{(x,y) \mid 2x - y = 6\}$

6. $\{(x,y) \mid x + y = 4\}$

7. $\{(x,y) \mid 2x + 3y = 5\}$

8. $\{(x,y) \mid x = -2\}$

9. $\{(x,y) \mid 2y = 3\}$

10. $\{(x,y) \mid y = -6\}$

11. $\{(x,y) \mid x - 5 = 0\}$

12. $\{(x,y) \mid y = x - 3\}$

13. $\{(x,y) \mid -4x = 12 - 3y\}$

14. $\{(x,y) \mid x + 7y = -14\}$

5 . عينّ الميل والجزء المقطوع من محور y في المسائل 5, 7, 9, 11, 13 .

6 . عينّ الميل والجزء المقطوع من محور y في المسائل 6, 8, 10, 12, 14 .

في المسائل من 17 - 22 عين معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع جزء من المحور y مقداره b ثم ارسم هذا الخط

17. $m = 4, b = 0$

18. $m = -2, b = 6$

19. $m = 0, b = -1$

20. $m =$ undefined

21. $m = 1, b = 3$

22. $m = -1, b = 2$

في المسائل من 23 - 30 عينّ معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة p والذي ميله m ثم ارسم هذا الخط

23. $p = (2,5), m = 3$

24. $p = (-4, 0), m = 5$

25. $p = (-1, 5), m = -2$

26. $p = (0,0), m = -1$

27. $p = (0,2), m = 1$

28. $p = (2, -3), m = 1$

29. $p = (-7, -4), m \times = -\frac{1}{2}$

30. $p = (0, -1), m = -\frac{1}{12}$

في المسائل من 31 - 38 عينّ معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين المذكورتين ثم ارسم هذا الخط

31. $(0,0) \quad (4, -2)$

32. $(-1,0) \quad (0,6)$

33. $(2,3) \quad (1,7)$

34. $(5,1) \quad (3, -3)$

35. $(-2, -2) \quad (0,5)$

36. $(10, -3) (0,0)$

37. $(5,8) \quad (-3,6)$

38. $(3, -1) \quad (1, 0)$

39. $x + y = 6 \ , \ p = (3, -1)$

40. $x - 2y = -3 \ , \ p = (0,0)$

41. $5x + 2y = 1 \ , \ p = (0,3)$

42. $2x + 39 = -3 \ , \ p = (-4, 5)$

في المسائل من 46 - 43 عينّ معادلة الخط المستقيمالذي يوازي الخط المستقيم المعطى ويمر بالنقطة p ثم ارسم كل من الخطين .

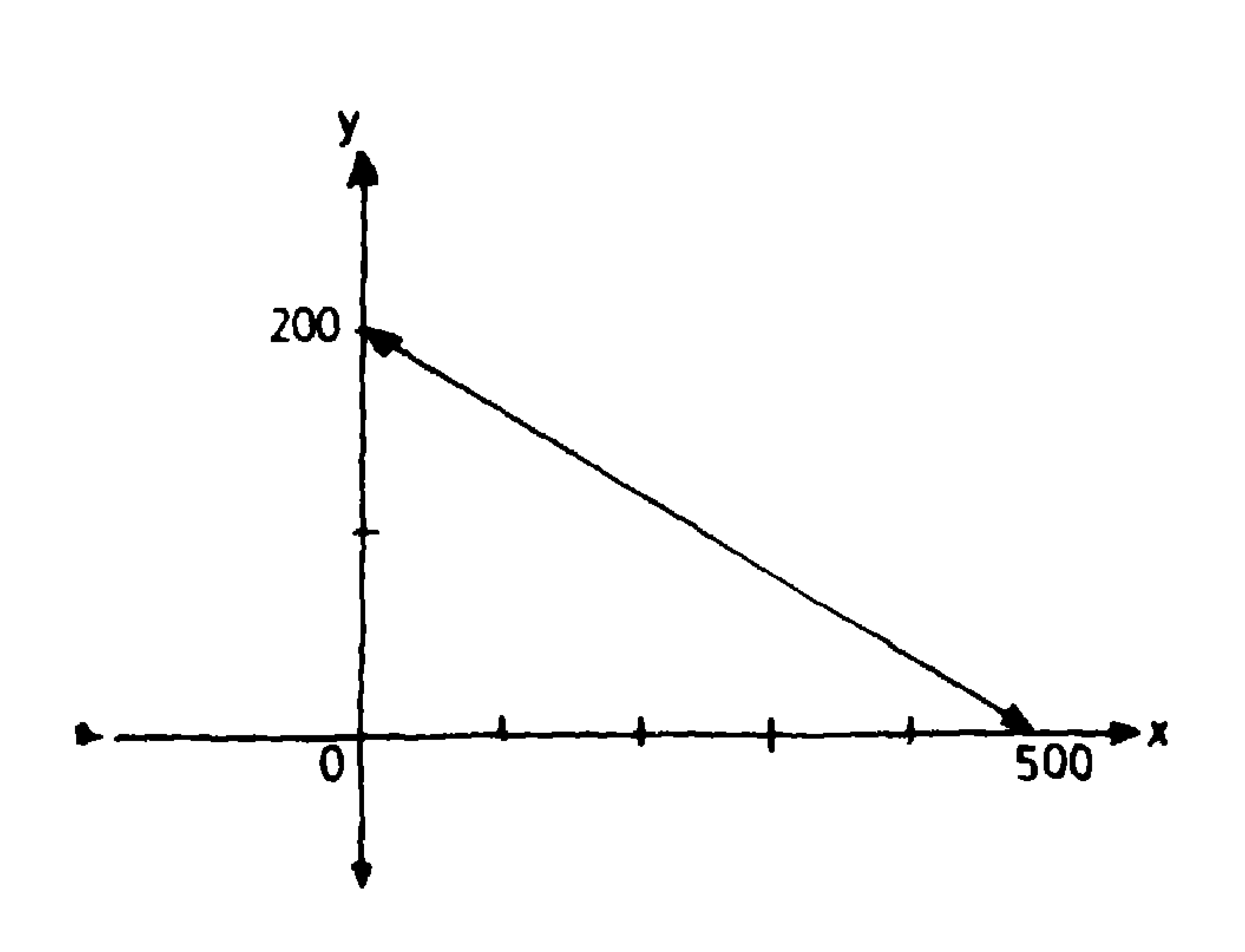
43. $x + y = 0, p = (2,0)$

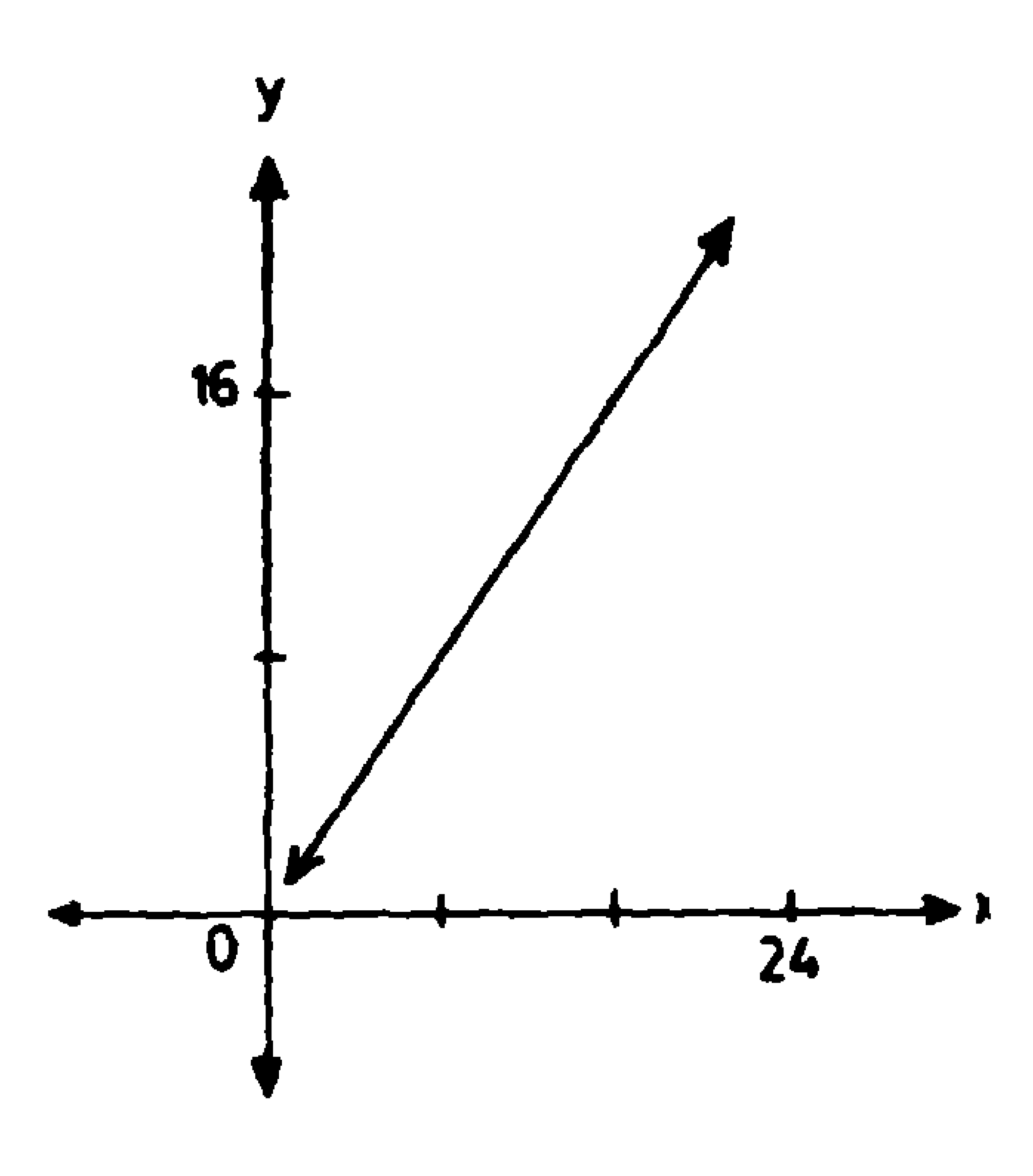
44. $2x - 2y = 5, p = (1,3)$

45. $3x - y = 6: p = (3,3)$

46. $5x + 10y = -4, p = (f), (0)$

في المسألتين 47 - 48 عينّ معادلة الخط المستقيم الموضّع بالشكل





(٤ ـ ٣) العلاقات والرسوم البيانية :

عبارات مثل

« محمد والد عمر »

و

«عبدالله صديق عبد العزيز »

و

« العدد 4 اصغر من العدد 7 » .

كلها امثلة لعلاقات Relations .

وأية معادلة او متباينة تربط أي عددين x و y تعتبر مثالاً لعلاقة . فباستخدام الفئة

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

يمكننا تكوين الفئة التالية من الأزواج المرتبة

$$\{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \}$$

وفي هذه الأزواج نجد ان المكوّن الأول اصغر من المكوّن الثاني .
وباستخدام نفس الفئة A نحصل على الفئة التالية S من الأزواج المرتبة

$$S = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$$

حيث أن المكوّن الأول في كل من هذه الازواج يساوي المكوّن الثاني . لاحظ ان هذه الفئة S تعين على الفئة A علاقة نسميّها « = » (تساوي) .

بصورة عامة سوف تُعرّف اية علاقة من A الى B بأنها فئة جزئية لـ AXB . الفئة التي عناصرها جميع المكوّنات الأولى في العلاقة تسمى بنطاق « Domain » العلاقة وتسمى الفئة التي عناصرها جميع المكوّنات الثانية في العلاقة مدى « Range » العلاقة .

كما هي الحالة في حاصل الضرب الكارتيزي AXB ، من الممكن ان تكون الفئة B هي نفسها الفئة A . وفي هذه الحالة نقول ان لدينا علاقة في الفئة A أو على الفئة A بدلاً

من علاقة من الفئة A الى الفئة A . نهتم بصورة خاصة بعلاقات على فئة الاعداد الحقيقية R . وعليه فان اية علاقة S على R عبارة عن فئة ازواج مرتبة من RXR . وهذا يعني ان

$$S \subseteq RXR$$

يمكننا استخدام نظام المحاور الاحداثية لتمثيل العلاقات كفئة نقاط في المستوى . ويقودنا هذا الى التعريف التالي .

تعريف :

اذا كانت S علاقة على R فان الرسم البياني Graph للعلاقة S هو فئة جميع النقاط في المستوى الاحداثي التي تناظر الأزواج المرتبة في S .

مثال « ١ » :

لكل من العلاقات التالية بينّ النطاق والمدى ثم ارسم الرسم البياني

(a) $S_1 = \{(-2,0), (-1,-2), (1,2), (0,-1)\}$

(b) $S_2 = \{(x,y) \mid -1 \leq x < 2, -3 \leq y \leq 4\}$

الحل :

نطاق S_1 هو

$\{-2, -1, 1, 0\}$

ومدى S_1 هو

$\{0, -2, 2, -1\}$

يتكون الرسم البياني لـ S_1 من النقاط الأربعة المبينة في الشكل (8)

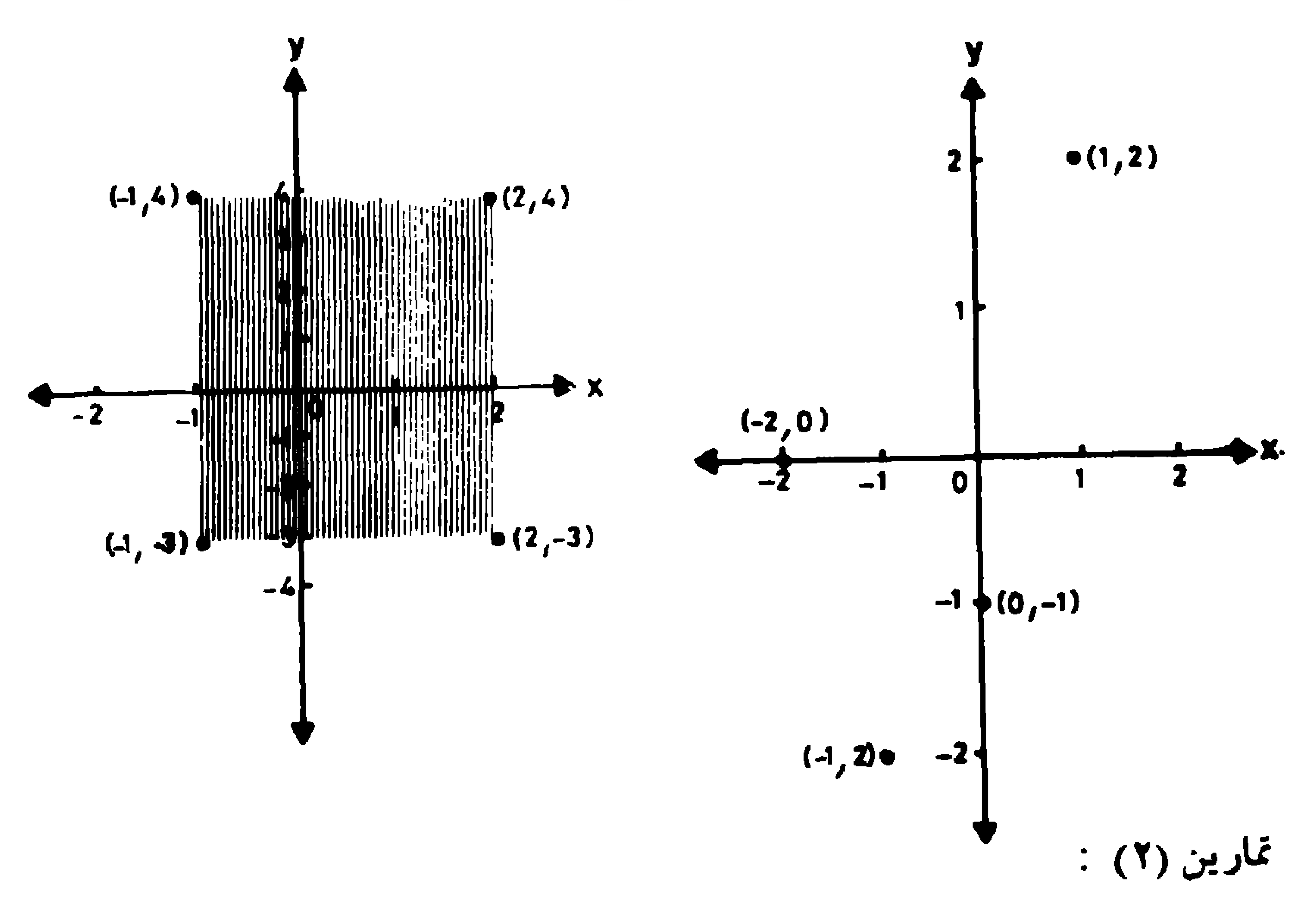
نطاق ' S_2 هو الفئة

$\{x / -1 \leq x \leq 2\}$

ومدى S_2 هو

$\{y / -3 \leq y \leq 4\}$

يتكون الرسم البياني للعلاقة S من جميع المنطقة المظللة في الشكل (٩)



تمارين (٢) :

في التمارين من 1 الى 10 أوجد النطاق والمدى للعلاقة المعطاة .

1. $\{(2,3), (3,1), (1,2)\}$
2. $\{(2,1), (3,2), (1,3)\}$
3. $\{(1,2), (2,2), (3,2)\}$
4. $\{(2,3), (2,2), (3,2)\}$
5. $\{(2,2), (1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2)\}$
6. $\{(-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2)\}$
7. $\{(1,8), (2,8), (3,6), (4,6)\}$
8. $\{(1,8), (1,7), (2,6), (2,5)\}$
9. $\{(2,1), (4,3)\ (6,5), (8,7), \ldots\}$
10. $\{(1,1), (4,2), (9,3), (16,4), \ldots\}$

في التمارين من 11 الى 14 اوجد حاصل الضرب الكرتيزي AXB و BXA

11. $A = \{a,b\}, B = \{c\}$

12. $A = \{1,2\} \cdot B = \{-1, 0, 1\}$

13. $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}, B = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

14. $A = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}$

15. في نظام احداثيات كرتيزية بينّ النقاط التي احداثياتها ما يلي :

(a) $(2,3)$ (b) $(-\frac{1}{2}, 1)$ c) $(-4, 5)$

(d) $(2,0)$ (e) $(-2, 0)$ f) $(-\frac{1}{3}, 2)$

(g) $(-2, 3)$ (h) $(4, -2)$ i) $(5, -4)$

16. اكتب احداثيات أية خمس نقاط على محور x . ما هو الشيء المشترك بين هذه الاحداثيات ؟

17. اكتب احداثيات خمس نقاط على محور y . ما هو الشيء المشترك بين هذه الاحداثيات ؟

18. أ) اكتب احداثيات خمس نقاط واقعة على خط أفقي .

ب) أكتب احداثيات خمس نقاط واقعة على خط عمودي .

(٤ - ٤) الدوال « Functions » :

تمثّل بعض العلاقات ما تسمى بالدوال . ومن دراستنا السابقة عن الخط المستقيم مثل $y = 2x + 3$ نجد انه يمكن الحصول على قيمة y بمعرفة قيمة x . وفي مثل هذه الحالة تعتبر x متغير مستقل independent وتعتبر y متغير تابع dependent .

تعريف :

الدالة هي علاقة لها خاصية ان لكل قيمة من قيم المتغير المستقل x توجد قيمة واحدة للمتغير التابع y .

وهناك تعريف مناظر للدالة بانها العلاقة التي ليس بها زوجان من النقط لهما نفس الاحداثي الأول . ويعني هذا ان اي خط عمودي على محور x لا يشترك مع منحني الدالة في اكثر من نقطة واحدة .

مثال « ١ » :

اي من العلاقتين التاليتين تعتبر دالة ؟

(a) $f = \{(-1, 2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$

(b) $h = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3, -4)\}$

الحل :

(a) f تعتبر دالة . لأن لكل قيمة للمتغير x توجد قيمة واحدة للمتغير y كما يتضح مما يلي :

x	y
$-1 \to$	2
$2 \to$	2
$3 \to$	5
$6 \to$	1

(b) h ليست دالة لوجود قيمتين للمتغير y مناظرتين للقيمة $x = 1$

x		y
0	→	7
	↗	5
1	→	2
3	→	− 4

(مخالف لتعريف الدالة)

لاحظ ان قيماً مختلفة للمتغير x يمكن ان تناظرها نفس قيمة y في الدالة .

ولـكل من النطـاق والمدى نفس المعنى بالنسبـة للـدوال مثـل ما لهما بالنسبـة للعلاقات .

ويمكن كتابة :

$$y = f(x)$$

لتبين ان y هي القيمة المناظرة للمتغير x . على سبيل المثال ، يمكن كتابة $f(3) = 5$ للقراءة (3,5) في المثال (a − 1) . ومن تعريف الدالة نجد ان لأية قيمة ثابتة للمتغير x هناك قيمة واحدة للدالة f(x) .

ونجد ان الخطوط في الصورة

$$y = mx + b$$

يمكن اعادة كتابتها في الصورة التالية

$$f(x) = mx + b$$

مثال « ٢ » :

افترض $f(x) = 2x + 3$

(أ) احسب $f(-2), f(-1), f(0), f(2)$

(ب) ارسم f(x)

الحل :

(أ)

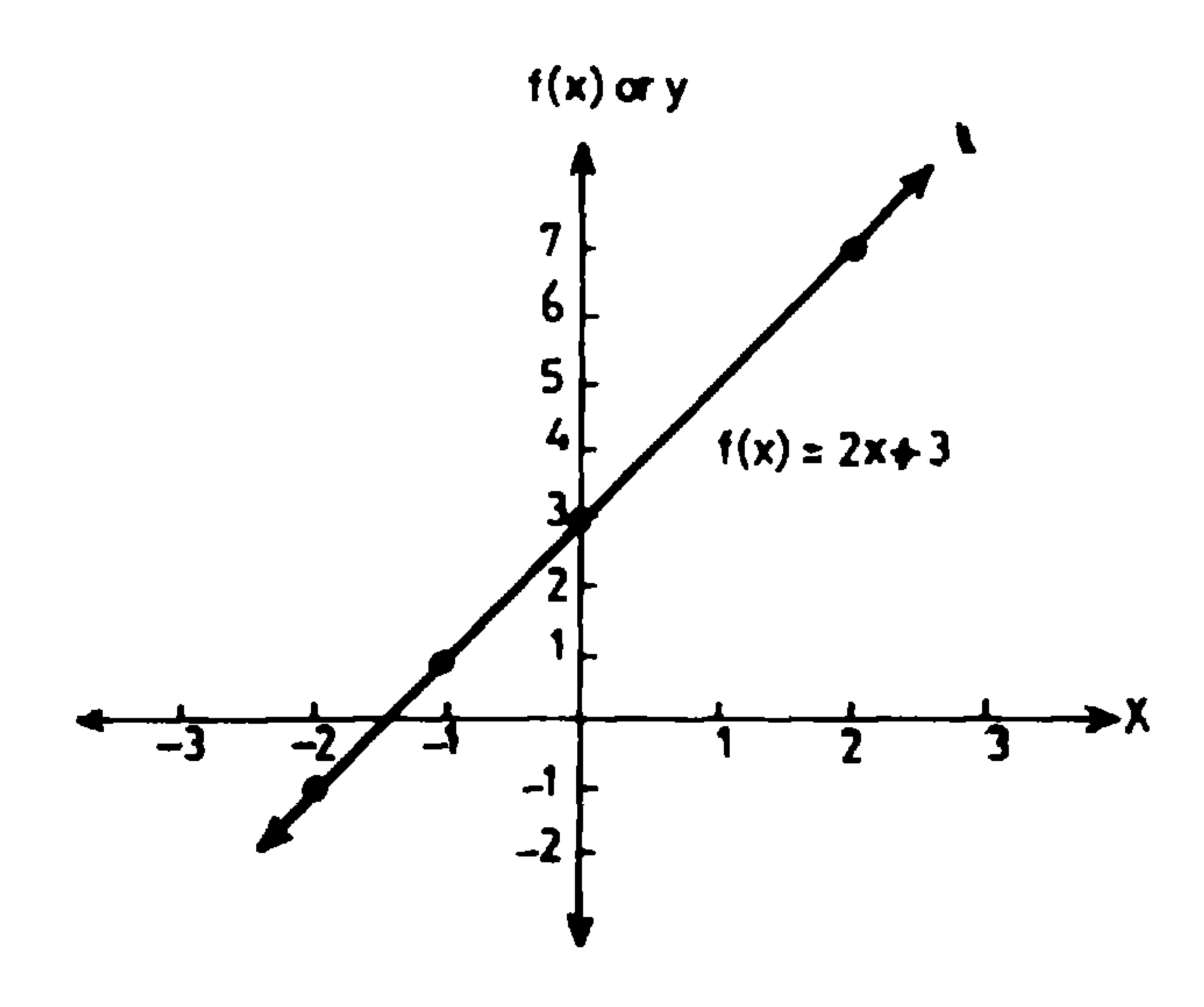
$$f(-2) = 2.(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$f(-1) = 2.(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$f(0) = 2.(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$f(2) = 2.(2) + 3 = 4 + 3 = 7$$

(ب) من الجزء (أ) لدينا النقط $(2,7), (0,3), (-1,1), (-2,-1)$ والتي يمكن رسمها وتوصيلها (أنظر شكل (10)) .



شكل (10)

مثال « ٣ » :

(أ) للدالة $f(x) = 2x^2 - x - 5$

احسب $f(t)$ و $f(-1)$

(ب) للدالة $g(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

احسب $g(x-1)$ و $g(4)$

الحل :

(أ)

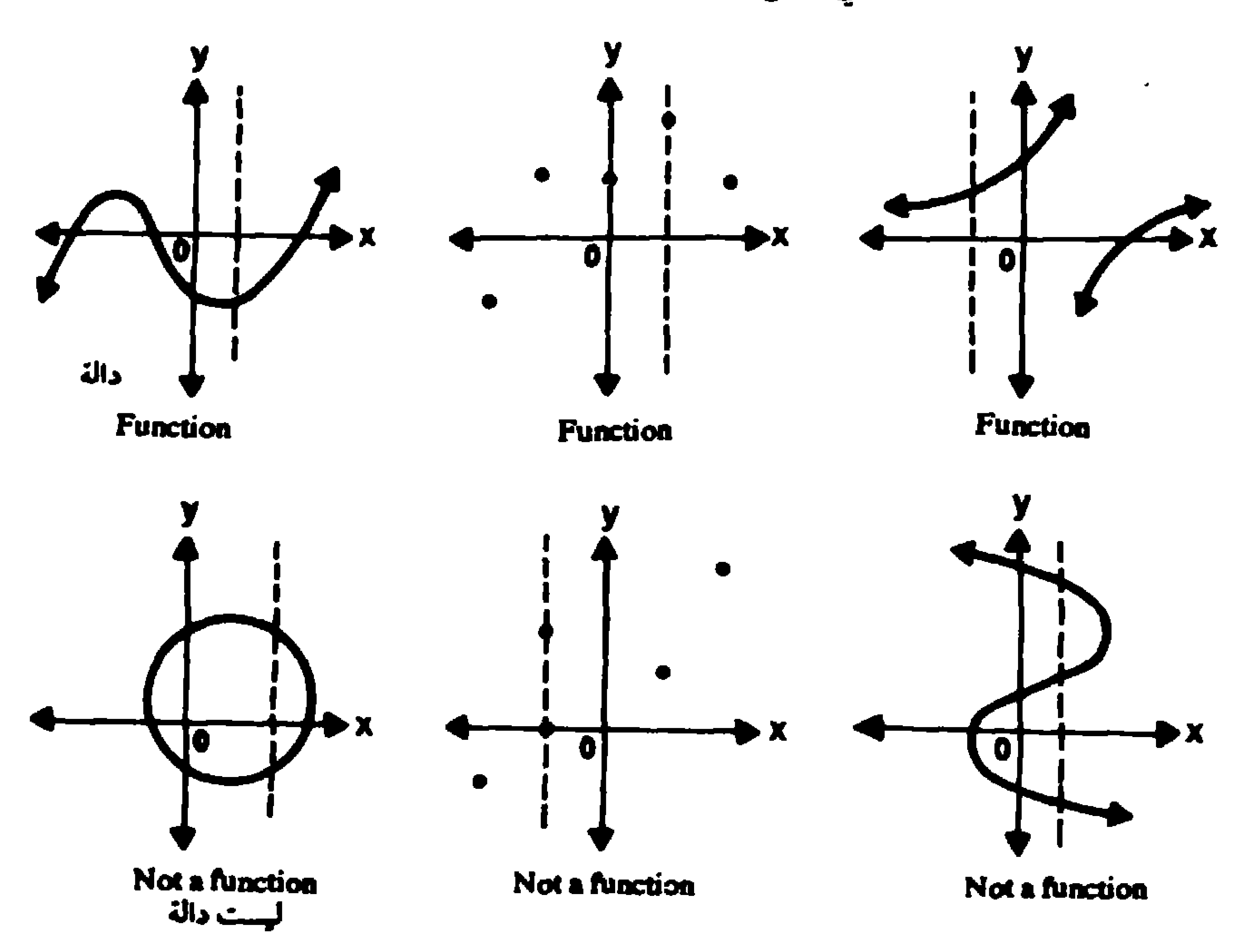
$$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 5$$
$$= 2 + 1 - 5 = -2$$
$$f(t) = 2t^2 - t - 5$$

(ب)

$$g(4) = \frac{4-1}{2.4+3} = \frac{3}{11}$$

$$g(x-1) = \frac{(x-1)-1}{2(x-1)+3} = \frac{x-2}{2x+1}$$

في مثال « ٣ » نجد انه من السهل معرفة ان g و f هي دوال . ويبينّ شكل (11) أمثلة على الدوال وغير الدوال . باستخدام ما يسمى باختبار الخط العمودي (اذا قطع الخط العمودي الموازي لمحور y المنحني في اكثر من نقطة فان المنحني لا يمثل دالة واذا قطعه في نقطة واحدة فقط فان المنحني يمثل دالة) .



شكل (11)

تعرف عمليات جبرية على الدوال كما يلي : اذا كانت كل من g و f دالة فان

مجموعهما . $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

الفرق بينهما $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

حاصل ضربهما $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

خارج قسمتهما $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$

تحصيلهما $(fog)(x) = f\left[g(x)\right]$

مثال « ٤ » :

اذا كانت $f(x) = x^2 , g(x) = 2x - 3$

للدالتين احسب

$f+g$ ، $f-g$ ، fg ، f/g ، fog, gof

الحل :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2) + (2x - 3) = x^2 + 2x - 3$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2) - (2x - 3) = x^2 - 2x + 3$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2)(2x - 3) = 2x^3 - 3x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x - 3} \quad , \quad x \neq \frac{3}{2}$$

$$(fog)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[(2x - 3)\right] = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$(gof)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[x^2\right] = 2(x^2) - 3 = 2x^2 - 3$$

مثال « ٥ » :

(أ) للدالة $f(x) = x^2$

احسب $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(ب) للدالة $g(x) = 2x^2 - 1$

احسب $g(1) + g(2) + g(3)$

الحل :

(أ) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$

$$= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

(ب) $g(1) + g(2) + g(3) = (2.1^2 - 1) + (2.2^2 - 1) + (2\ .\ 3^2 - 1)$

$$= 1 + 7 + 17 = 25$$

تمارين (٣) :

في المسائل من 1 - 8 اذكر نطاق ومدى العلاقة ثم ارسم العلاقة :

1. $R = \{(-7, 2), (-3, 0), (5, -1), (-3, 6)\}$
2. $R = \{(-3, 1), (-1, 1), (0, 1), (4, 1)\}$
3. $R = \{(-4, 0), (-4, 4), (2, 3), (1, 9)\}$
4. $R = \{(5, 0), (0, 1), (0, 7)\}$
5. $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$
6. $R = \{(1, -3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5)\}$
7. $R = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
8. $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (9, 9)\}$

9. أي من العلاقات في المسائل من 1 - 8 تمثل دالة ؟

في المسائل من 10 - 15 احسب قيم الدالة ثم ارسم الدالة .

10. $f(x) = 4x - 3, f(-1), f(0), f(1), f(2)$
11. $f(x) = x + 5, f(-2), f(-1), f(0), f(1)$
12. $g(x) = -2, g(1), g(2), g(3), g(4)$

13. $g(x) = \frac{x-1}{3}$, $g(-2), g(1), g(4), g(7)$

14. $h(x) = (x+2)^2$, $h(-4), h(-3), h(-2), h(-1), h(0)$

15. $h(x) = x^2$, $h(-2), h(-1), h(0), h(1), h(2)$

16. للدالة $f(x) = x^2 - 2x + 3$

احسب

$f(-2), f(2), f(t)$

17. للدالة $g(x) = 2x^3 + 7$

احسب

$g(-3), g(0), g(z)$

18. للدالة $h(x) = \sqrt{x+2}, x \geq -2$

احسب

$h(-2), h(2), h(t-2)$

19. للدالة $f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$, $x \neq -3$

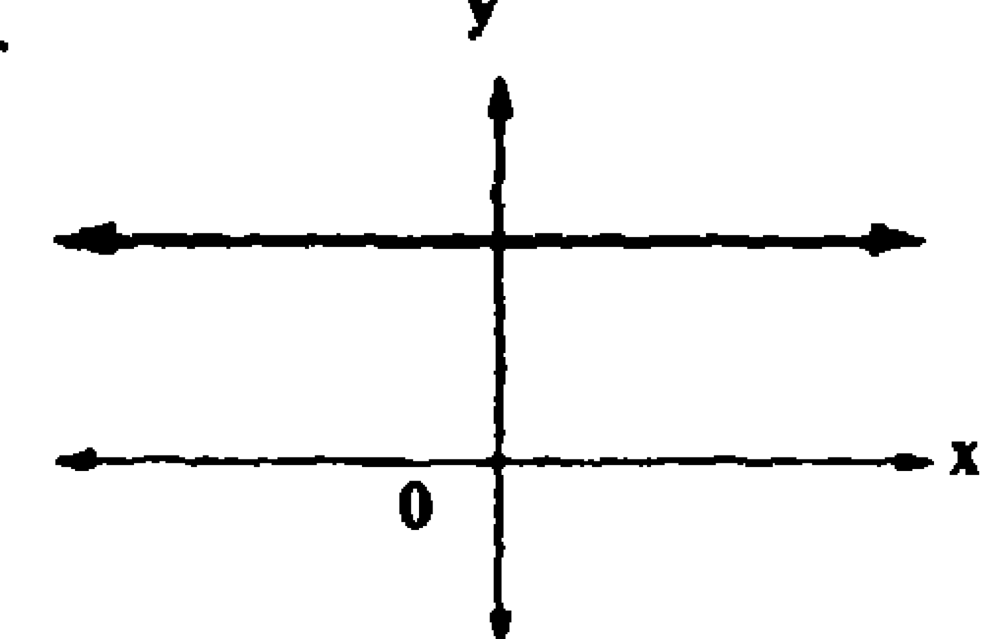
احسب

$f(-1), f(3), f(x+1)$

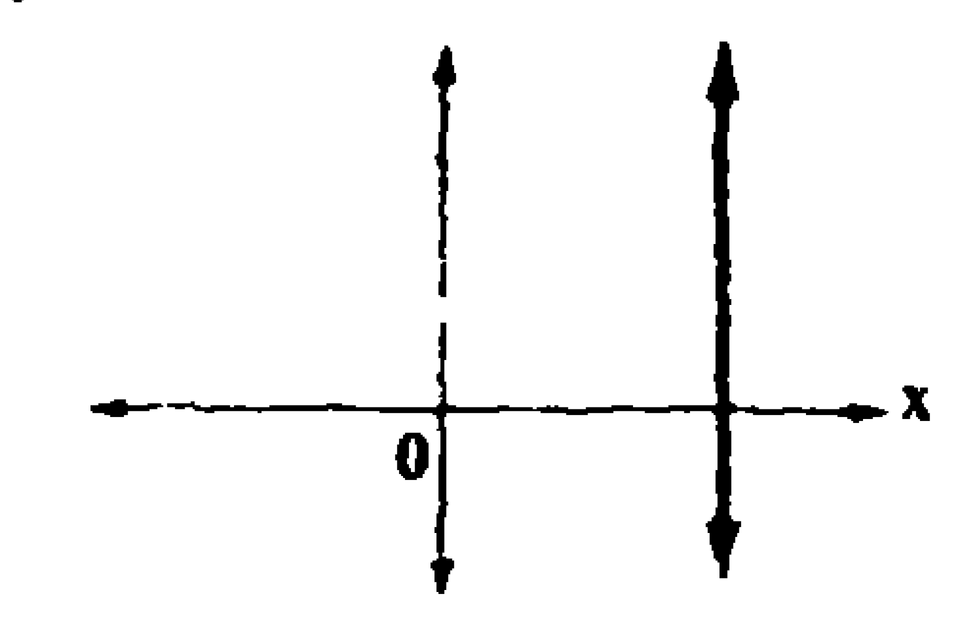
20. ما هو نطاق الدوال في المسائل من 16 – 19 ؟

في المسائل من 21 – 28 استعمل اختبار الخط العمودي لمعرفة اي الرسوم يصف دالة .

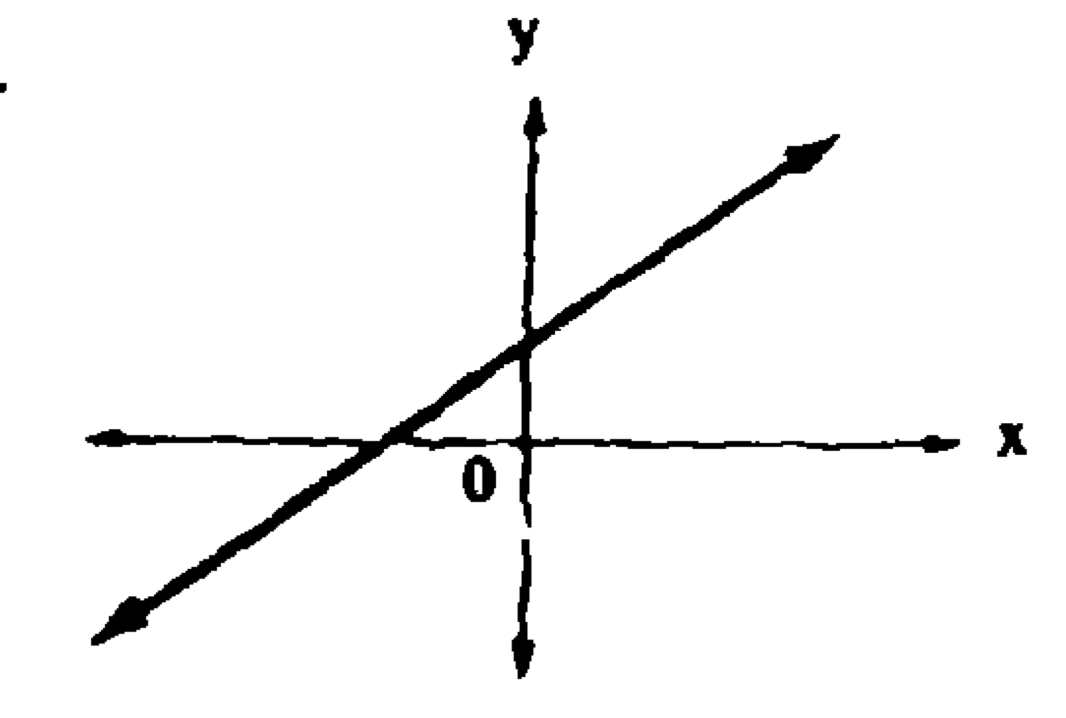
21.



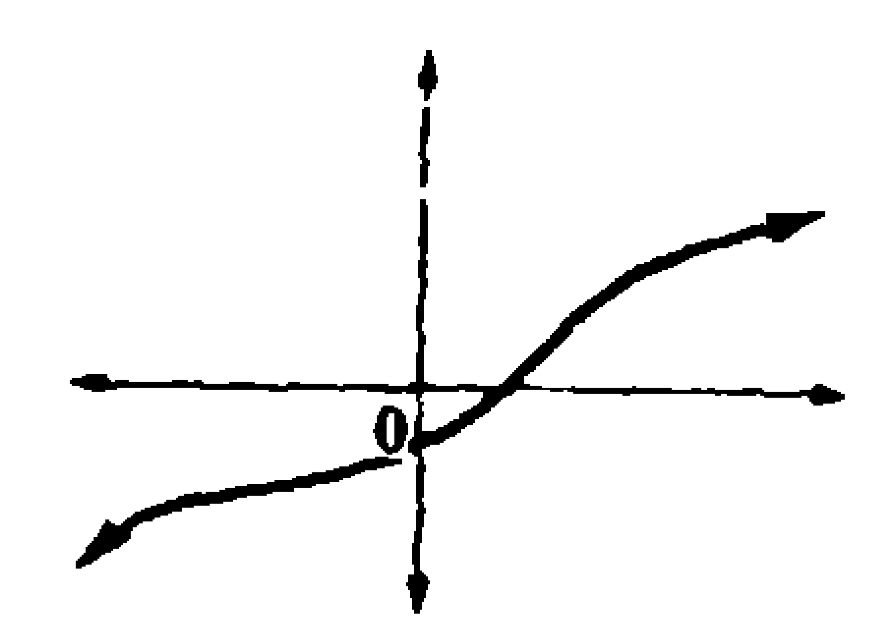
22.



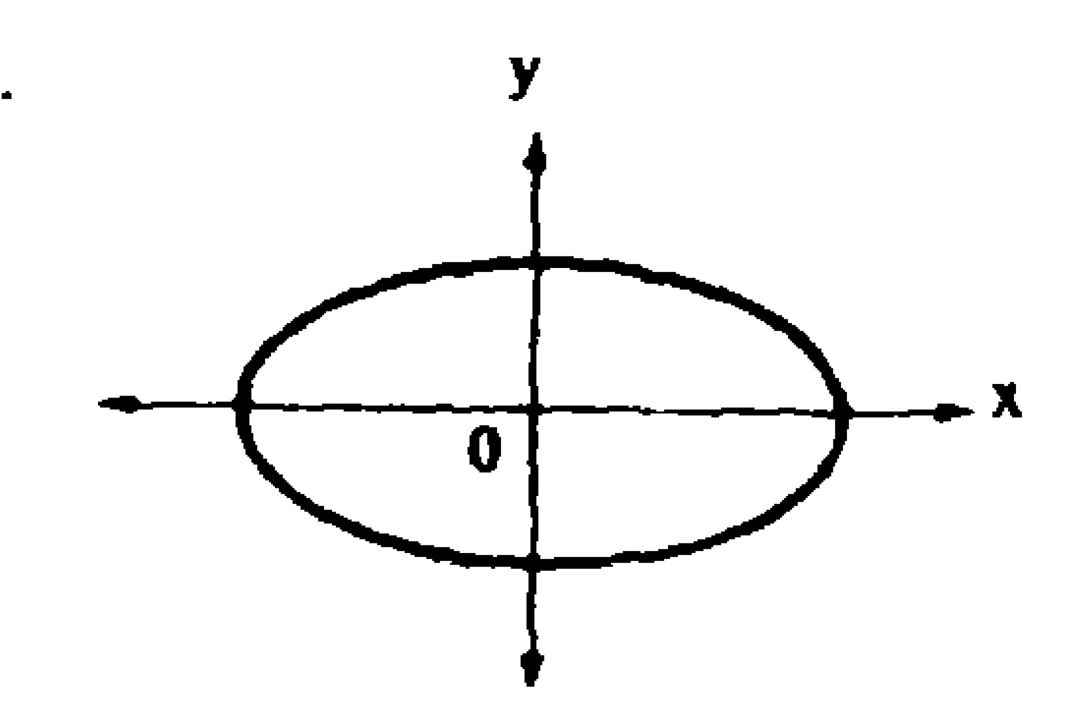
23.



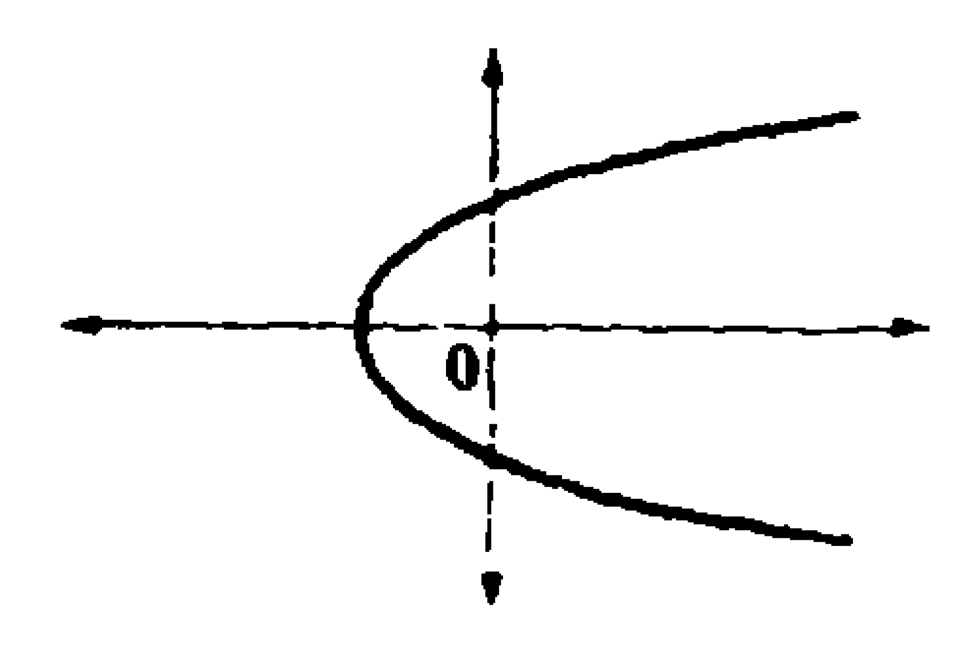
24.



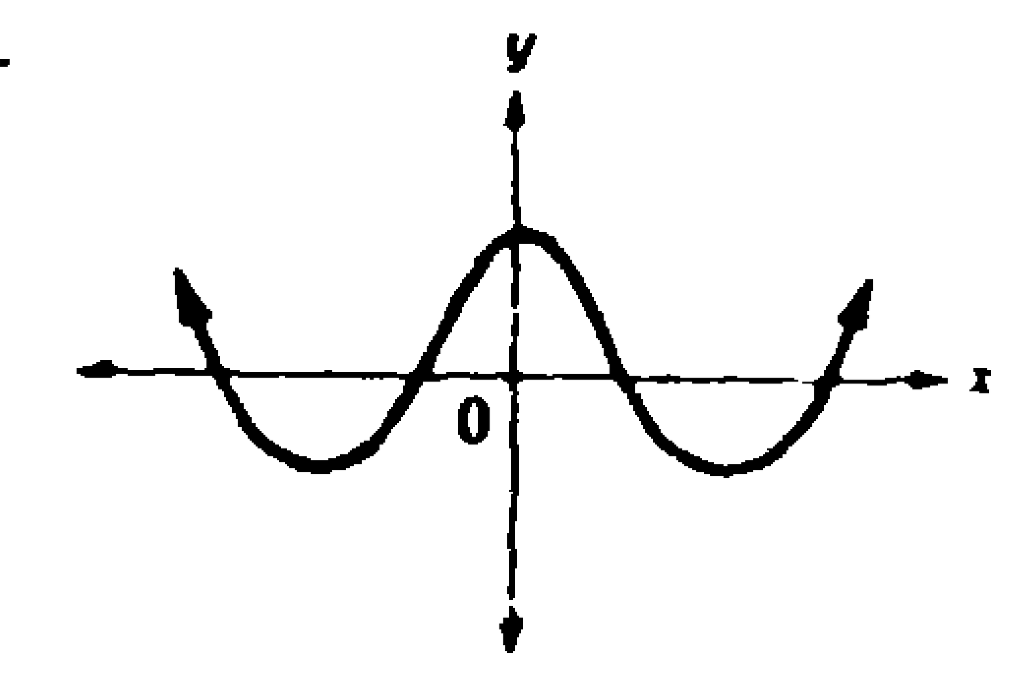
25.



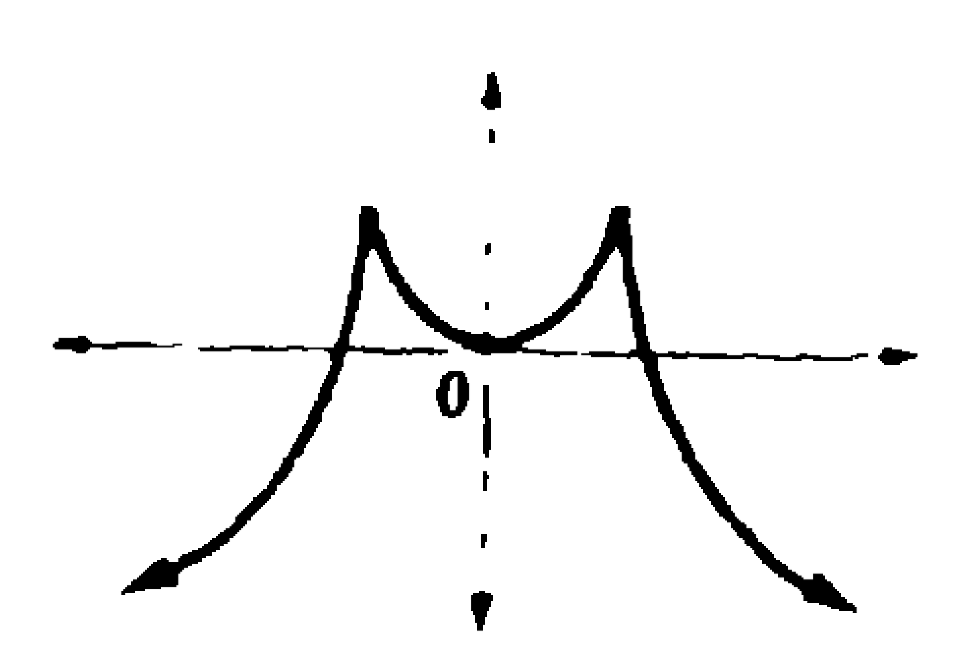
26.



27.



28.



في المسائل من 29 – 34 احسب $f + g, f - g, fg, f \circ g$

29. $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 + 1$

30. $f(x) = x^3, g(x) = 3x$

31. $f(x) = (x - 1)^2 \quad , \quad g(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

32. $f(x) = \sqrt{x}, x > 0, g(x) = x^2 - 2x + 3$

33. $f(x) = x^2 + 5x - 7, g(x) = 3x^2 - x - 1$

34. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 5}, x \neq 5, g(x) = \sqrt{x}, x > 0$

35. $g+f, g-f, g/f, g∘f$ للدالة في سؤال 31 ثم قارن النتيجة مع نتيجة سؤال ٣١ .

36. احسب $g+f, g-f, gf,$ و $g∘f$ للدالة في سؤال 32 .

37. للدالة $f(x) = 5x^2$

احسب

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

38. للدالة $f(x) = x^3$

احسب

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

39. للدالة $f(x) = 4x - 3$

احسب

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

40. للدالة $g(x) = 2x^2 + x$

احسب

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

41. للدالة $f(t) = (3t+1)^2$

احسب

$$\frac{1}{3}[f(0) + f(1) + f(2)]$$

42. للدالة $f(x) = 5x$

احسب

$$f(x) . f(-x)$$

43. للدالة $g(x) = x + 1$

احسب

$$2[g(2)]^2 - g(2) + 5$$

44. للدالة $f(t) = \frac{2t - 1}{t + 3}, t \neq -3$

احسب

$$\frac{5}{f(4)}$$

45. باستعمال رموز الدالة ، عبّر عن الدخل (R) كدالة لعدد الدراجات المباعة (x) ، حيث كل دراجة مباعة تدر دخلاً مقداره 110 ريال .

46. باستعمال رموز الدالة ، عبّر عن التكلفة (y) كدالة لعدد الدراجات المنتجة (x) ،حيث كل دراجة منتجة تكلف 65 ريال وتكاليف ثابتة (غير معتمدة على عدد الدراجات المنتجة) بمقدار 1200 ريال .

47. ما هو النطاق المناسب للدالة في سؤالي 45 ، 46 ؟ .

(٤ ـ ٥) أنظمة المعادلات الخطية Systems of Linear Equations :

نعلم مما سبق ان فئة الحلول لمعادلة خطية في متغيرين (x, y) هي

$$S = \{ (x,y) / ax + by = c \}$$

ندرس في هذا الفصل كيفية حل أنظمة معادلات خطية في متغيرين

تعريف :

حل النظام الخطي

$$A = \{ (x,y) / a_1 x + b_1 y = c_1 \}$$

$$B = \{ (x,y) / a_2 x + b_2 y = C_2 \}$$

هو فئة جميع الأزواجِ المرتبة (x,y) التي تحقق المعادلتين .

اذا فرضنا ان

$$A = \{ (x, y) / a_1 x + b_1 y = c_1 \}$$

$$B = \{ (x,y) / a_2 x + b_2 y = c_2 \}$$

فان تقاطع فئتي حل هاتين المعادلتين (ويرمز له بالرمز $A \cap B$) هو (فئة) حلول النظام الخطي . هناك ثلاث نتائج ممكنة

(١) $A \cap B = \phi$

(٢) $A \cap B$ تتكون من زوج مرتب واحد

(٣) $A \cap B$ يحتوي أزواجاً مرتبة كثيرة

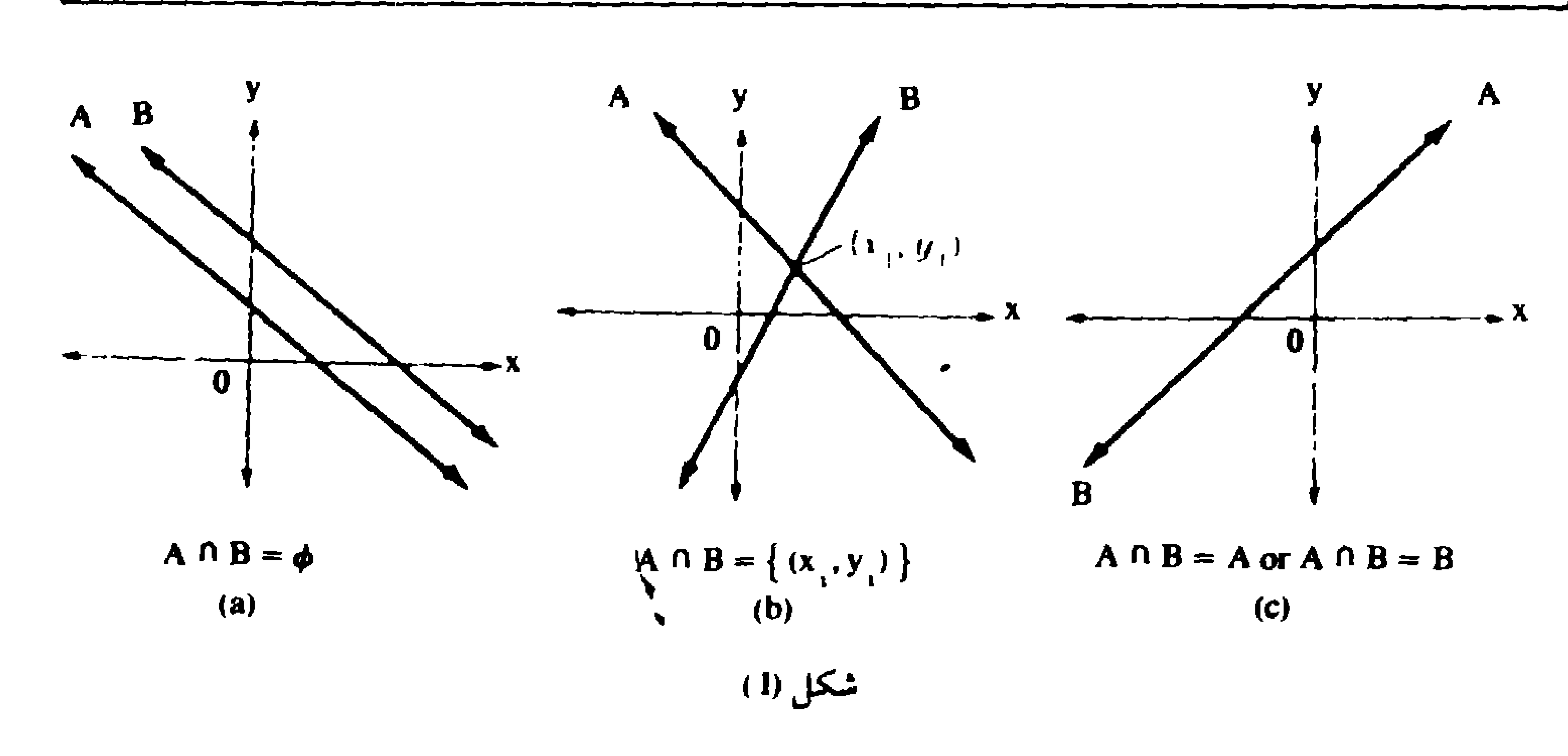
يمكن تمثل كل من هذه الامكانيات بيانياً .

تصنيف

(١) قد لا يكون هناك أي زوج مرتب يحقق كلتا المعادلتين . تحدث هذه الحالة عندما يكون المستقيمان A ، B مستقيمين متوازيين . [شكل (1a)] . يسمى نظام المعادلات في هذه الحالة غير متناسق أو غير متسق .

(٢) قد يكون هناك زوج مرتب واحد فقط (x_1, y_1) يحقق كلتا المعادلتين . تحصل هذه الحالة عندما يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة (x_1, y_1) . [شكل (1b)] . يسمى نظام المعادلات في هذه الحالة متسقاً ومستقلاً وله حل واحد فقط .

(٣) قد يكون للمعادلتين نفس الرسم البياني [شكل (1c)] اذا كانت جميع الأزواج المرتبة التي تحقق A تحقق B أيضاً . في هذه الحالة للنظام عدد لا نهاية له من الحلول ويسمى النظام نظاماً معتمداً أو غير مستقل .



شكل (1)

يمكننا تصنيف اي نظام برسم المعادلتين على نفس المحاور الاحداثية ثم نلاحظ النتيجة . المثال التالي يوضح هذا .

مثال « ١ » :

صنف كلا من الأنظمة الآتية باستخدام الرسوم البيانية :

(a) $A: x + y = 2$
$B: x + y = 3$

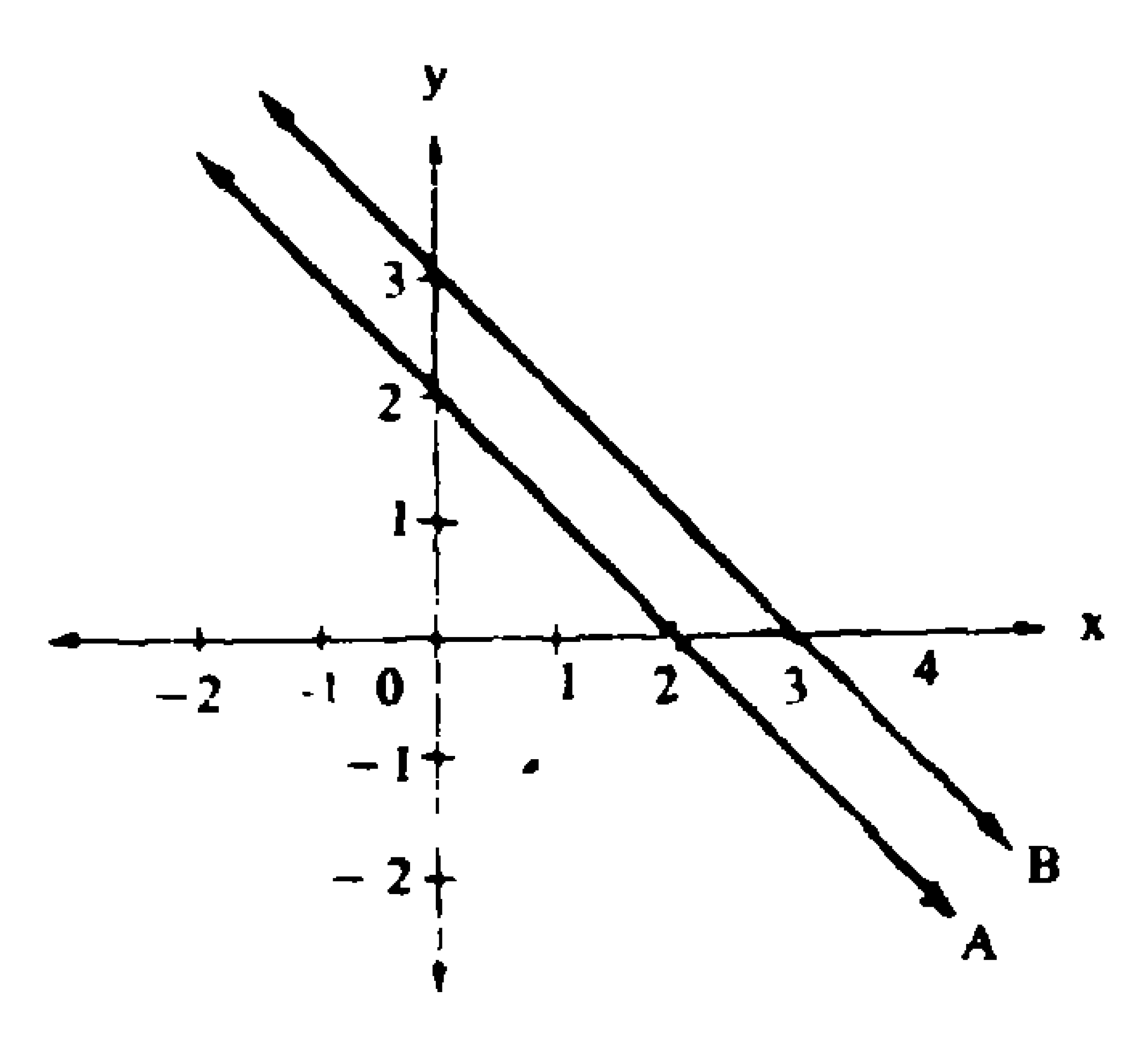
(b) $A: 2x + 2y = 4$
$B: x + y = 2$

(c) $A: x + y = 2$
$B: x - y = 0$

الحل :

(a) الرسم البياني في [شكل (2)] : بما ان الرسم البياني هو مستقيمان متوازيان فالنظام غير متناسق ، وعليه فان

$$A \cap B = \phi$$

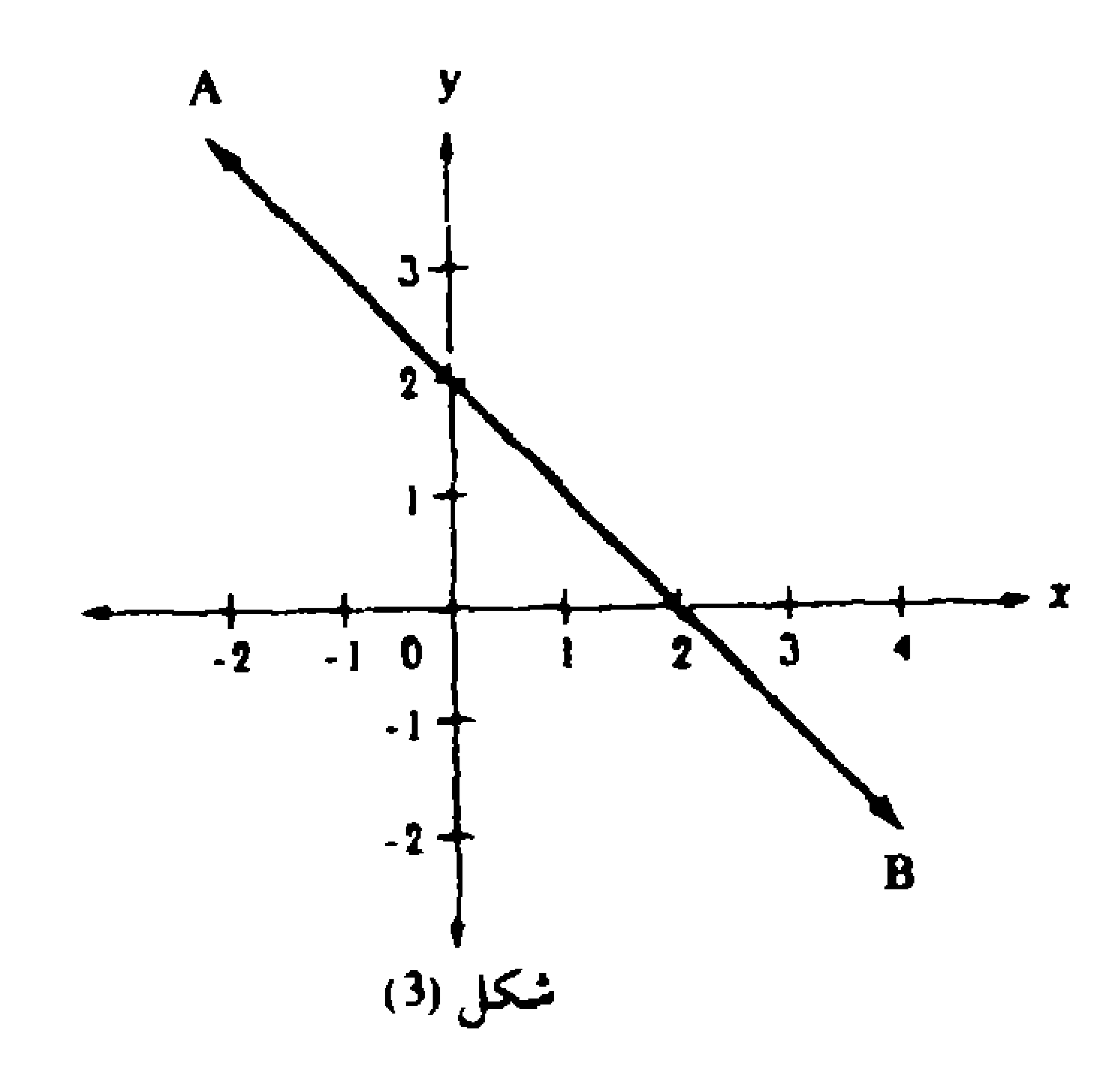


شكل (2)

(b) الرسم البياني في [شكل (3)] .

بما ان الرسم البياني هو نفس الخط المستقيم فالمعادلتان معتمدتان أو غير مستقلتين . وعليه فان

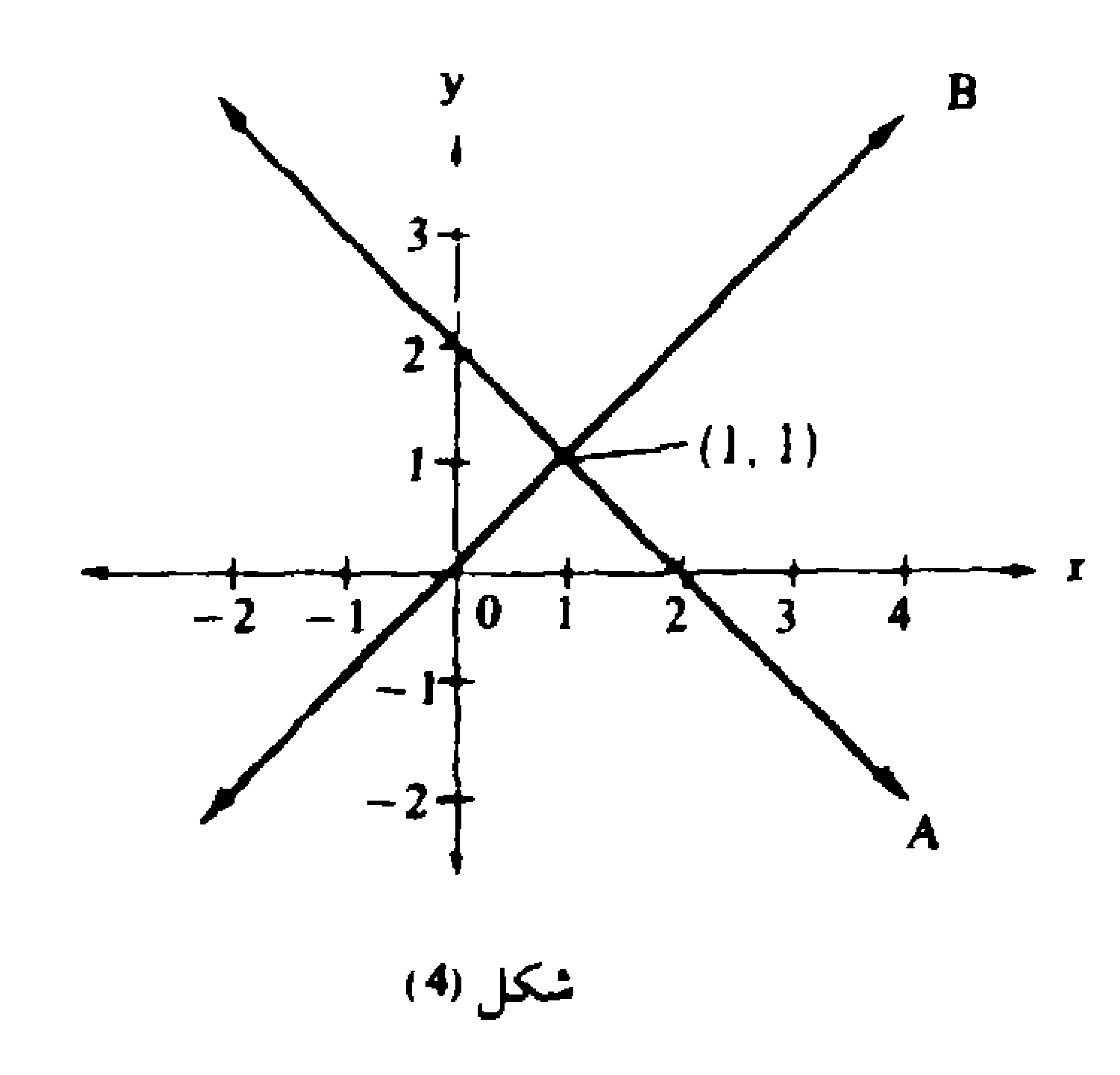
$A \cap B = A$ و $A \cap B = B$



شكل (3)

(c) الرسم البياني في [شكل (4)] : بما ان الخطين المستقيمين يلتقيان فان المعادلتين مستقلتان . وعليه

$$A \cap B = \{ (1,1) \}$$



شكل (4)

مع ان طريقة الرسوم البيانية مفيدة في تصنيف بعض النظم ، ولكنها غير مناسبة لهذا الغرض . فمثلاً قد يظهر ان خطين متوازيان ولكنهما في الحقيقة يلتقيان . هدفنا في هذا الفصل هو ايجاد الحل الوحيد للأنظمة المستقلة . غالباً ما لا يمكن تحديد الحل بالضبط من الرسم البياني . فلا يمكن التمييز مثلا بين النقطة (1.5, 2.5) والنقطة (1.5001, 2.5001) بيانياً . واستخدام الرسوم البيانية يعطى حلولاً تقريبية في معظم الحالات . وبالتالي فاننا نحتاج الى طريقة جبرية مضبوطة .

سوف ندرس في هذا الفصل طريقتين جبريتين لحل نظم المعادلات الخطية . طريقة التعويض وطريقة الجمع او الحذف . وهاتان الطريقتان تبسطان النظام المعطى لتحويله الى معادلة واحدة في متغير واحد والتي سبق ان تعلمنا كيفية حلها . ثم نستعمل قيمة هذا المتغير التي حصلنا عليها من المعادلة الجديدة لايجاد المتغير الآخر .

طريقة التعويض :

نوضّح هذه الطريقة بمثال .

مثال « ٢ » :

أوجد الحل $A \cap B$ للنظام

$A: 2x + 3y = 6$

$B: x - y = 2$

الحل :

توجد اولا قيمة x من المعادلة B

$B: x = 2 + y$

نستعمل الآن المقدار 2+y للمتغير x والذي وجدناه في المعادلة B بدلاً من قيمة x في المعادلة A . هذا يعطينا معادلة واحدة في y وهي :

$A: 2(2 + y) + 3y = 6$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$A: 4 + 2y + 3y = 6$

$4 + 5y = 6$

$5y = 2$

$y = \frac{2}{5}$

لاحظ ان قيمة y هي احداثي واحد للحل . بالتعويض عن قيمة y في المعادلة B (أو A) نحصل على

$B: x = 2 + \frac{5}{2}$

$x = 2\frac{2}{5}$

$\therefore \quad A \cap B = \{(2\frac{2}{5}, \frac{2}{5})\}$

يجب ان نحقق صحة الحل بالتأكد من ان الحل يحقق كلتا المعادلتين

تحقيق : B

$$2\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\frac{12}{5} - \frac{2}{5} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\frac{10}{5} \stackrel{?}{=} 2$$

$$2 \stackrel{?}{=} 2$$

تحقيق : A

$$2(2\frac{2}{5}) + 3(\frac{2}{5}) \stackrel{?}{=} 6$$

$$2(\frac{12}{5}) + \frac{6}{5} \stackrel{?}{=} 6$$

$$\frac{24}{5} + \frac{6}{5} \stackrel{?}{=} 6$$

$$\frac{30}{5} \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 \stackrel{?}{=} 6$$

اذاً

$$x = 2\frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$$

يعتبر حلاً للنظام .

يمكن تلخيص طريقة التعويض كما يلي :

الخطوة (١) :

استخدم احدى المعادلتين لايجاد احد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر .

الخطوة (٢) :

عوّض في المعادلة الأخرى بصيغة المتغير التي حصلنا عليها في الخطوة (١) فتحصل على معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد .

الخطوة (٣) :

حل المعادلة التي وجدت بالخطوة (٢) تحصل بذلك على احدى الاحداثيات للحل المطلوب .

الخطوة (٤) :

استخدم النتيجة التي حصلت عليها في الخطوة (٣) للحصول على الاحداثي الآخر .

ملاحظة :

القيمة التي وجدناها بحل المعادلة ذات المجهول الواحد يجب ان تعوّض في احدى المعادلات التي تحتوي متغيرين للحصول على الاحداثي الآخر .

تحذير :

اذا عوّضنا خطأ بصيغة المتغير التي حصلنا عليها في الخطوة (١) في نفس المعادلة التي حصلنا منها على هذه الصيغة سوف نحصل على متطابقة ($2 = 2$ مثلا) وسوف لا يكون باستطاعتنا الاستمرار في خطوات الحل الأخرى .

ماذا يحدث اذا كان النظام الذي نحاول حله بهذه الطريقة نظاماً غير متناسق ؟ (أي ليس له حل) أو نظاماً معتمداً (أي له عددٍ لا نهاية له من الحلول) ؟ سبق ان رأينا ان النظام

$A: x + y = 2$

$B: x + y = 3$

غير متناسق ، لنحاول تطبيق طريقة التعويض على هذا النظام .

الخطوة (١) :

حل المعادلة B للمتغير y

$B: y = 3 - x$

الخطوة (٢) :

استبدل y في المعادلة A

$A: x + 3 - x = 2$

الخطوة (٣) :

حل المعادلة A يعطى $A: 3 = 2$ وهذا غير صحيح .

وبالتالي اذا كان النظام غير متناسق ، نحصل دائماً على علاقة غير صحيحة . سبق ورأينا ان النظام

$A: 2x + 2y = 4$

$B: x + y = 2$

نظام معتمد ، لنحاول الآن تطبيق طريقة التعويض .

الخطوة (١) :

حل المعادلة B للمتغير y

$$B: y = 2 - x$$

الخطوة (٢) :

استبدل قيمة y في A

$$A: 2x + 2(2 - x) = 4$$

الخطوة (٣) :

حل المعادلة A يعطى

$$A: 2x + 4 - 2x = 4$$

$$4 = 4$$

وهذه علاقة صحيحة دائماً (متطابقة) .

اذا كان النظام معتمداً سوف نحصل على متطابقة .

تصنيف الأنظمة

اذا انتهت طريقة التعويض بمتطابقة (4 = 4 مثلا) فالمعادلات معتمدةDependent

اذا انتهت طريقة التعويض بعلاقة غير صحيحة (3=2 مثلا) فالمعادلات غير متناسقة inconsistent .

مثال « ٣ » :

شعبة التسويق في مصنع للآلات الحاسبة توصلت الى النماذج التالية للايراد Revenue والتكلفة Cost لانتاج وبيع x من الآلات الحاسبة العلمية

Revenue : $R = 20x$
Cost : $C = 12x + 10,000$

أوجد مستوى الانتاج والبيع الذي يكون فيه الايراد مساوياً للتكلفة ؟ ثم أوجد التكلفة والايراد لهذا المستوى من الانتاج .

الحل :

بالتعويض عن قيمة R نحصل على

$$R = C$$

$$20x = 12x + 10000$$

حل هذه المعادلة لـ x يعطي

$$8x = 10000$$

$$x = 1250$$

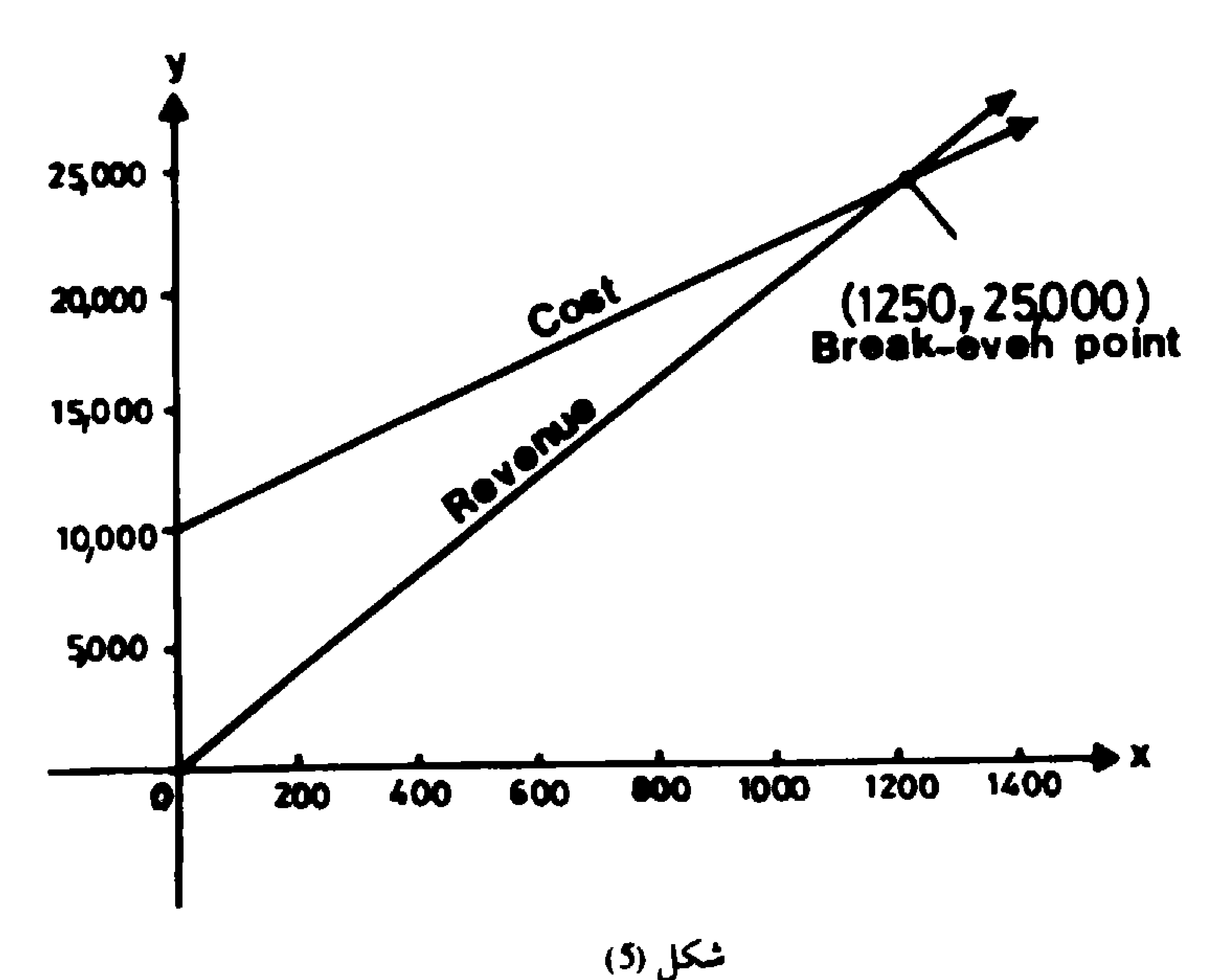
وعليه فان

$$R = 20 \times 1250 = 25000 = C$$

هذا يعني ان التكلفة والايراد يكونان متساويان عندما تكون عدد الآلات الحاسبة تساوي 1250 .

يسمى هذا نقطة تعادل Break even point

يتضح من [شكل (5)] انه اذا باعت الشركة اكثر من 1250 آلة حاسبة فسوف تربح ، اما اذا باعت اقل من 1250 لآلة حاسبة فان الشركة تخسر .



شكل (5)

طريقة الجمع او الحذف :

طريقة الجمع مبنية على عملية الجمع الى الطرفين المناظرين للمعادلتين ، (وهي مكتوبة بالصورة القياسية) لاعطاء معادلة واحدة بمتغير واحد . ان هدف هذه الطريقة هو نفس هدف طريقة التعويض ولكن الخطوات مختلفة .

مثال « ٤ » :

حل النظام التالي بطريقة الجمع

$$A: x + y = 3$$
$$B: x - y = 1$$

الحل :

تجمع اولا الاجزاء المتناظرة من المعادلتين فنحصل على

$$\begin{array}{r} A: x + y = 3 \\ B: x - y = 1 \\ \hline A + B: 2x = 4 \end{array}$$

وهذه معادلة واحدة في متغير واحد وبحلها نحصل على

$$x = 2$$

استعمل الآن قيمة x (التي تساوي 2) للحصول على القيمة المناظرة لـ y . بالتعويض عن x بـ 2 في A (أو B) نحصل على

$$A: 2 + y = 3$$
$$y = 1$$
$$\therefore \quad A \cap B = \{(2, 1)\}$$

اذا استبدلنا قيمة x بـ 2 في المعادلة B لحصلنا على نفس القيمة « 1 » لـ y . تذكر ان في عملية الحل نجد قيمة x أو y وعليه يمكن ايجاد قيمة المتغير الأخر من اي من المعادلتين .

وعموماً اذا كان جمع المعادلتين في النظام لا يحذف احد المتغيرات مباشرة فانه يمكن استخدام خاصية الضرب في المعادلة للحصول على نظام مكافىء يمكن حذف احد المتغيرات فيه بواسطة الجمع .

ملاحظة :

يمكن اختيار عوامل حاصل الضرب بطريقة يمكن بواسطتها ان تكون معاملات المتغير الذي تريد حذفه من المعادلتين متساوية في القيمة ومختلفة في الاشارة .

مثال « ٥ » :

حل النظام

$$A: 3x + 5y = 4$$

$$B: 2x - 3y = -10$$

الحل :

افرض اننا اخترنا حذف x

باستطاعتنا ضرب A في 2 - و B في 3+

$$-2A: -6x - 10y = -8$$

$$3B: 6x - 9y = -30$$

بالجمع نحصل على

$$-19y = -38$$

$$y = 2$$

للحصول على x ، استبدل y بـ 2 في A

$$A: 3x + 5(2) = 4$$

$$3x + 10 = 4$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

اذا

$$x = -2, y = 2$$

تصنيف الأنظمة

اذا انتهت طريقة الجمع بعلاقة غير صحيحة ، (2 = 4 مثلا) فالنظام غير متناسق .

اذا انتهت طريقة الجمع بمتطابقة (4 = 4 مثلا) فالنظام معتمد

أنظمة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل :

فئة الحلول لمعادلة من الدرجة الأولى بثلاثة متغيرات x, y, z هي

$$S = \{ (x, y, z) / ax + by + cz = d \}$$

فمثلا بعض عناصر فئة الحلول لـ

$$S = \{ (x, y, z) / x + y - 2z = 0 \}$$

هي

$$(1,1,1), (1, 2, \frac{3}{2}), (2, -1, \frac{1}{2}), (3, 1, 2)$$

تعريف :

حل النظام الخطي

$$A = \{ (x, y, z) / a_1 x + b_1 y + c_1 z = D_1 \}$$
$$B = \{ (x, y, z) / a_2 x + b_2 y + c_2 z = D_2 \}$$
$$C = \{ (x, y, z) / a_3 x + b_3 y + c_3 z = D_3 \}$$

هو فئة الثلاثيات المرتبة (x, y, z) التي تحقق جميع المعادلات الثلاثة

وكما هو الحال في أنظمة المعادلات ذات المجهولين

(١) قد لا يكون هناك أي حل للنظام (المعادلات غير متسقة) .

(٢) قد يكون هناك حل واحد فقط .

(٣) قد يكون هناك كثير من الحلول .

لحل نظام متكون من ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل نستخدم طريقة الحذف بالجمع . سيكون هدفنا تحويل نظام متكون من ثلاث معادلات ذات ثلاثة مجاهيل الى نظام متكون من معادلتين ذات مجهولين بحذف احد المجاهيل ، ثم نحول النظام المتكون من معادلتين بمجهولين الى معادلة واحدة بمجهول واحد . بحل هذه المعادلة نجد قيمة المجهول . بالتعويض عن قيمة هذا المجهول في احدى المعادلتين ذات المجهولين نجد قيمة المجهول الثاني . ثم بالتعويض عن قيمة المجهولين في احدى المعادلات الأصلية نجد قيمة المجهول الثالث . ترى هذه الطريقة موضحة في خطوات خمسة في المثال التالي الذي يجب عليك دراسته بكل عناية .

مثال « ٦ » :

حل النظام الخطي التالي

$$A: x + y - 2z = 0$$
$$B: x - 2y + z = 3$$
$$C: 2x - y + z = 7$$

الحل :

الخطوة (١) :

قرر أياً من المجاهيل ترغب ان تحذف اولا . نحن نختار حذف x أولا .

الخطوة (٢) :

انتخب زوجين مختلفين من المعادلات واحذف x من كل من الزوجين باجراء العمليات الضرورية لذلك .

نختار المعادلتين B و A والمعادلتين C و A

احذف x باستخدام B, A

$$A: x + y - 2z = 0$$
$$-1B: -x + 2y - z = -3$$
$$D: 3y - 3Z = -3$$

احذف x باستخدام C, A

$$-2A: -2x - 2y + 4z = 0$$
$$c: 2x - y + z = 7$$
$$E: -3y + 5z = 7$$

الخطوة (٣) :

احذف الآن احد المجهولين الباقيين (أي y أو z) .

نحن نختار حذف y

$$D: 3y - 3z = -3$$

$$E: -3y + 5z = 7$$

$$2z = 4$$

$$\boxed{Z = 2}$$

الخطوة (٤) :

عوض عن Z في المعادلة D أو E ثم حل المعادلة الناتجة . نحن نختار تعويض قيمة Z في المعادلة D .

$$D: 3y - 3(2) = -3$$

$$3y - 6 = -3$$

$$3y = 3$$

$$\boxed{y = 1}$$

الخطوة (٥) :

عوض عن قيمتي y و z في المعادلة A او B أو C ثم اوجد قيمة x . نحن نختار التعويض في المعادلة A

$$A: x + (1) - 2(2) = 0$$

$$x + 1 - 4 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$\boxed{x = 3}$$

اذاً الحل هو

$x = 3$ و $y = 1, Z = 2$

للتحقيق عوض عن جميع قيم المجاهيل في جميع المعادلات الثلاثة

$$A: \ 3 + 1 - 2(2) \stackrel{?}{=} 0$$

$$4 - 4 \stackrel{\vee}{=} 0$$

$$B: \ 3 - 2(1) + 2 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 - 2 + 2 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 \stackrel{\vee}{=} 3$$

$$c: \ 2(3) - (1) + 2 \stackrel{?}{=} 7$$

$$6 - 1 + 2 \stackrel{?}{=} 7$$

$$7 \stackrel{\vee}{=} 7$$

تصنيف الأنظمة الخطية

اذا كانت المعادلتان D ، E (في الخطوة ٣) معتمدة (غير مستقلة) فان النظام الأصلي نظام معتمد او غير مستقل .

اذا كانت المعادلتان D ، E (في الخطوة ٣) غير متسقة فان النظام الخطي الأصلي غير متسق .

لنفرض انك تحاول حل النظام الخطي التالي

$$A: \ 2x + y + 2z = 2$$

$$B: \ x + y + Z = 1$$

$$C: \ x + 2y + Z = 4$$

بحذف y باستخدام المعادلتين B, A والمعادلتين C, A فانك تحصل في الخطوة الثالثة على النظام

$$x + Z = 1$$

$$x + Z = 0$$

(في الواقع هي $3x + 3Z = 0$

ومن الواضح ان المعادلتين الاخيرتين غير متسقتين . وعليه فان النظام الأصلي نظام غير متسق ، أي ان المعادلات متناقضة .

اما اذا حاولت حل النظام الخطي

$$A: x + y + z = 1$$

$$B: -x + y + 7z = 1$$

$$c: 2x + 3y + 6z = 3$$

بحذف x باستخدام المعادلتين B, A والمعادلتين C, A فانك تحصل في الخطوة ٣ على النظام التالي

$y + 4z = 1$ (في الواقع $2y + 8z = 2$)

$$y + 4z = 1$$

ومن الواضح ان هاتين المعادلتين معتمدتان . وعليه فان النظام الخطي الأصلي نظام معتمد ، أي ان المعادلات غير مستقلة بل تعتمد على بعضها البعض .

عندما يكون النظام معتمداً يمكنك ايجاد حلول النظام الأصلي وذلك بايجاد حلول لـ y ، z (في النظام ذي المجهولين) والتعويض عن هذه القيم في النظام الأصلي للحصول على قيمة x .

فمثلا ، في النظام y ، z الأخير عندنا

$$y = 1 - 4z$$

(١) عندما $z = 1$ فان

$$y = 1 - 4(1) = -3$$

بالتعويض عن $z = 1$ ، $y = -3$ في المعادلة A نحصل على $x = 3$ وعليه فان $(3, -3, 1)$ هو احد حلول النظام الأصلي .

(٢) عندما $z = -1$ فان

$$y = 1 - 4(-1) = 5$$

بالتعويض عن قيمة z, y في المعادلة A نحصل على $x = -3$ وعليه فان $(-3, 5, -1)$ هو احد حلول النظام الأصلي

(٣) وبصورة عامة عندما تكون $Z = c$ (أي ثابت كان) فان

$$y = 1 - 4c$$

ونحصل بالتعويض عن قيم z, y في المعادلة A ان

$$x = 3c$$

وعليه فان $(3c, 1 - 4c, c)$ يمثل احد حلول النظام الخطي عند قيمة محددة لـ c .
فمثلا عندما $c = 2$ فان

$$x = 6, \quad y = -7, \quad z = 2$$

وهنا فان فئة حلول هذا النظام هي :

$$\{ (x, y, z) / x = 3c, y = 1 - 4c, z = c, -\infty < c < \infty \}$$

تمارين (٤) :

في المسائل من 1 الى 4 استخدم طريقة التعويض لتوضيح ما اذا كان النظام غير متسق ام غير مستقل .

1. A: $x - y = -2$
   B: $x - y = 4$

2. A : $2x - y = 2$
   B : $x - \frac{1}{2}y = 2$

3. A: $3x + 3y = 3$
   B: $x + y = 1$

4. A : $x + 3y = 6$
   B: B : $\frac{1}{2}x + y = 2$

في المسائل من 5 الى 10 استخدم طريقة الجمع والحذف لايجاد حل للنظام

5. A: $x + y = 4$
   B: $x - y = 2$

6. A: $x - y = 3$
   B: $x + y = 1$

7. A: $2x + y = 1$
   B: $6x - y = 1$

8. A: $x - 4y = 1$
   B: $-x + 10y = 2$

9. A: $x + y = 5$
B: $2x + 3y = 12$

10. A: $3x - 2y = 22$
B: $x - y = 9$

في المسائل من 11 الى 14 استخدم طريقة الجمع او الحذف لتوضيح ما اذا كان النظام غير متسق او غير مستقل .

11. A: $x + y = 5$
B: $x + y = -3$

12. A: $x + 3y = 3$
B: $\frac{1}{2}x + y = 2$

13. A: $3x - 3y = 6$
B: $2x - 2y = 4$

14. A: $2x - y = 4$
B: $x - \frac{1}{2}y = 2$

في المسائل من 15 الى 18 بينّ ما اذا كان النظام غير متسق

15. A: $2x + y = -3$
B: $x - 2y = 11$

16. A: $x + y = 4$
B: $2x + y = 1$

17. A: $3x + 2y = 6$
B: $5x + 6y = 12$

18. A: $3x - 7y = 1$
B: $6x + 2y = -2$

19. مجموع عددان 18 والفرق بينهما 12 اوجد العددين .

20. عددين أحدهما ضعف الثاني ومجموعهما 21 اوجد العددين .

21. مستطيل محيطه 22 متراً . إذا ضُعِّف العرض اصبح طول محيطه الجديد 28 متراً اوجد الطول والعرض للمستطيل الاصلي .

22. محلول يتركّب من 50% من حامض نقي امتزج مع محلول آخر يتركّب من 20% من الحامض النقي ليكون 100 سم^3 من محلول يتركّب من 26% من الحامض النقي . كم سم^3 من كل من المحلولين استخدم لتكوين المحلول الجديد ؟

23. إذا كانت المعادلة $y = mx + b$ تتحقق بقيم (x,y) الآتية : $(1,-2)$ ، $(3,4)$ أوجد المعادلة (حل في b, m) .

24. تبيع شركة وحدات منتجة بسعر 30 ريال لكل وحدة . اذا كانت الشركة

تتكلف 12,000 ريال لتبدأ في عملية الانتاج وانتاج كل وحدة يكلف الشركة 18 ريال . كم وحدة يجب ان تنتج الشركة لتغطي هذه التكاليف ؟

25. محيط مستطيل 32 متراً والفرق بين طوله وعرضه 4 متر اوجد ابعاد المستطيل .

في المسائل من 26 - 33 حل النظام الخطي .

واذا كان النظام مستقلاً اوجد الحل .

واذا كان النظام غير مستقل اوجد حلين عدديين والحل العام .

26. A: $x - y + z = 7$
B: $2x + y - z = 7$
C: $x - 2y + 3z = 8$

27. A: $2x - y - z = 8$
B: $x + 3y + z = 9$
C: $x - y - z = 3$

28. A: $x + 4y - z = 10$
B: $2x - y + 3z = 7$
C: $x - y - z = 0$

29. A: $3x - y + z = 13$
B: $x + 2y + z = 5$
C: $x + 2y - z = 3$

30. A: $x + y + z = 6$
B: $y + z = -1$
C: $x - z = 2$

31 A: $x + y + z = 3$
B: $x + z = 1$
C: $2x + y + 2z = 2$

32. A: $x - y + z = 4$
B : $y - 2z = 3$
C: $x - z = 7$

33. A: $2x + y + z = 3$
B: $x + y - z = 3$
C: $x + z = 3$

(٤ - ٦) المتباينات الخطية :

نعلم ان الرسم البياني لفئة الحلول لأية معادلة خطية مثل

$$x + y = 3$$

هو خط مستقيم . نرغب ان نحدد في هذا الفصل ونرسم بيانياً فئة الحلول لأية متباينة خطية مثل

$$x + y \leq 3$$

تتكون فئة الحلول من الغئة

$$\{(x,y) / x + y = 3\} \cup \{(x,y) / x + y < 3\}$$

الرسم البياني للمعادلة

$$x + y = 3$$

يقسم المستوي الكرتيزي الى نصفين . نصف مستوى في كل جهة من جهتي الخط المستقيم . احد نصفي المستوى يمثل فئة الحلول للمتباينة . $x + y < 3$

ونصف المستوى الآخر يمثل فئة الحلول للمتباينة . $x + y > 3$

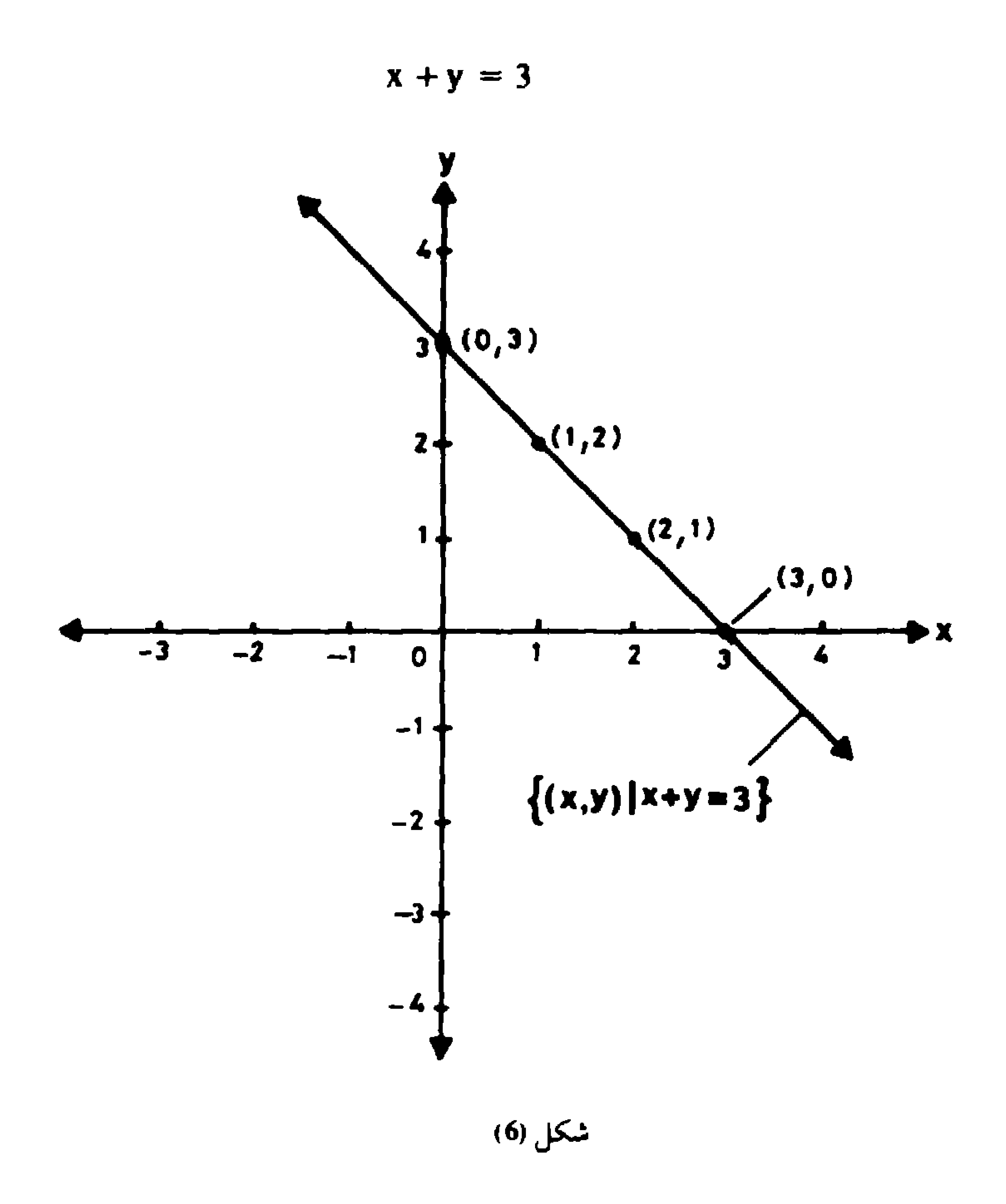
عملية ايجاد ورسم الحل للمتباينة

$$x + y \leq 3$$

موضحة في الشرح التالي

الخطوة (١) :

ارسم الخط المستقيم $x + y = 3$



شكل (6)

الخطوة (٢) :

انتخب اية نقطة في المستوى (في أي من النصفين) لا تقع على الخط المستقيم الذي رسم في خطوة (١) . تسمى هذه النقطة المنتخبة بنقطة اختبار (Test Point) اذا حققت نقطة الاختبار المتباينة .

$$x + y < 3$$

فنصف المستوى الذي يحتوي على تلك النقط هو فئة حلول المتباينة . اما اذا لم تحقق نقطة الاختبار المتباينة فان نصف المستوى الآخر هو فئة حلول المتباينة .

افرض انك تختار النقطة (0,0) كنقطة اختبار . اوجد قيمة

$$x + y < 3$$

في النقطة (0,0) .

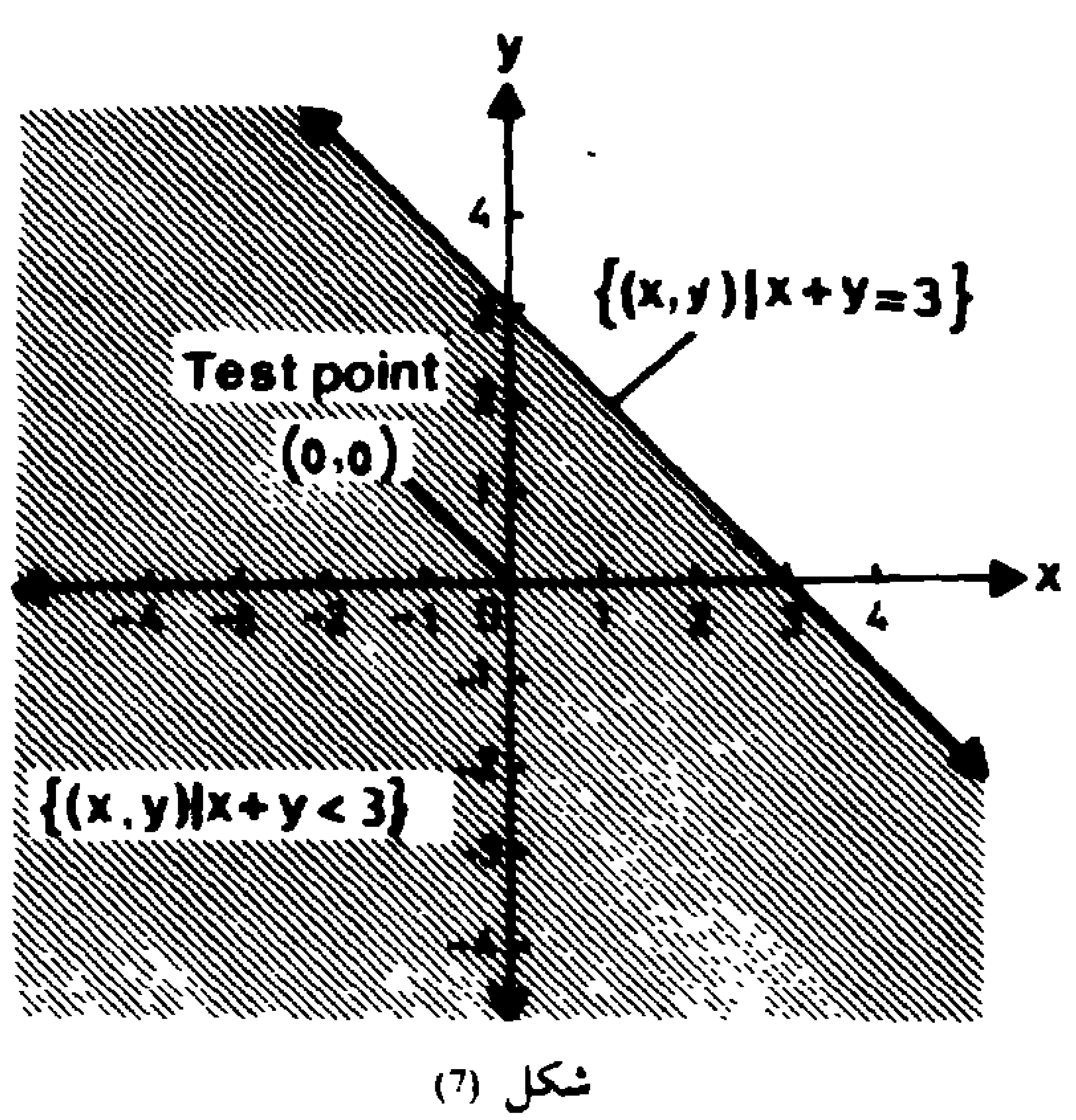
اذا

$$0 + 0 < 3$$

أو

$$0 < 3$$

وهذه علاقة صحيحة . بما ان (0,0) تحقق المتباينة ، اذاً نصف المستوى الذي يحتوي على (0,0) هو فئة الحلول المطلوبة . وهذه الفئة هي الفئة المظللة في (شكل (7)) .



شكل (7)

إذاً فئة حلول المتباينة

$$x + y \leq 3$$

تتألف من جميع النقاط الواقعة على والنقاط الواقعة تحت الخط المستقيم ، أي

$$\{ (x,y) \ / \ x+y = 3 \} \cup \{ (x,y) \ / \ x + y < 3 \}$$

يمكن استخدام طريقة نقطة الاختبار ' لتحديد فئة الحلول لأية متباينة خطية ولكن اذا وضعت العلاقة بصورة (ميل ـ تقاطع) فلا حاجة الى نقطة اختبار . سوف نحصر الشرح في متباينات من نوع تعابير مركبة تحتوي معادلة (=) ومتباينة ($>$ أو $<$) .

يمكن التعبير عن أية متباينة خطية بشكل (ميل ـ تقاطع) كما يلي :

$y \geqslant mx + b$ أو $y \leqslant mx + b$

حيث ان m هو ميل المستقيم و b هو التقاطع مع محور y .

الحالة الأولى :

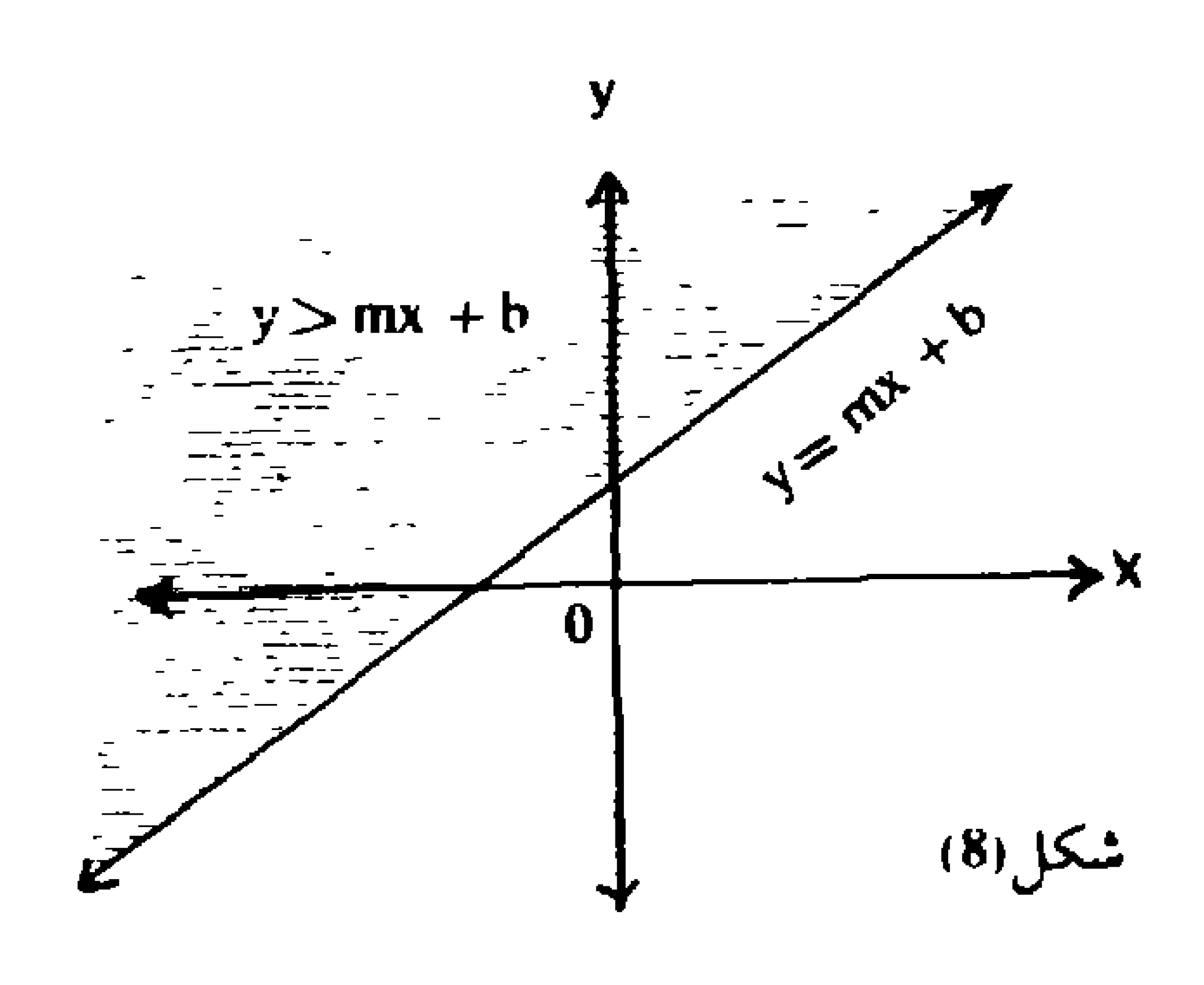
الرسم البياني لفئة حلول المتباينة

$y \geqslant mx + b$

تتألف من نصف المستوى فوق الخط المستقيم

$y = mx + b$

والخط المستقيم نفسه (انظر الى شكل (8))



شكل(8)

الحالة الثانية :

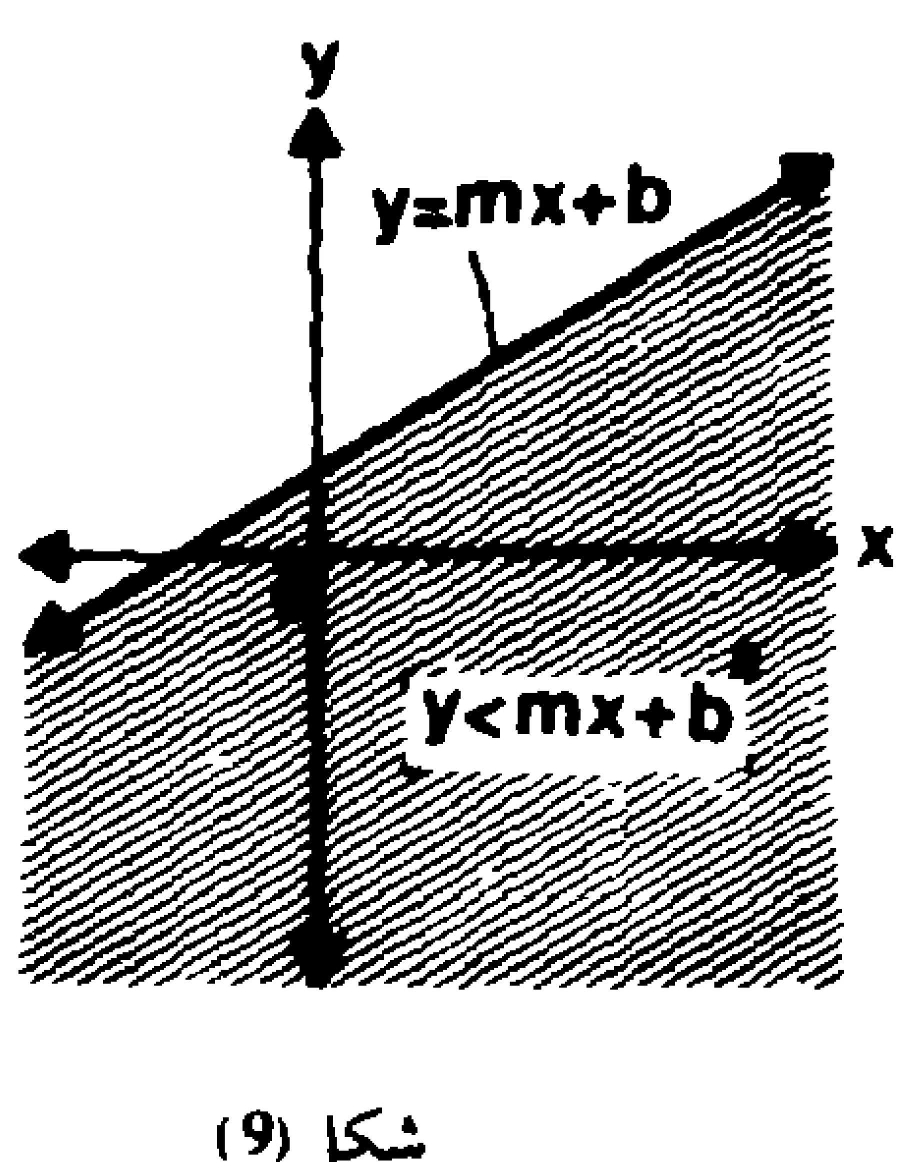
الرسم البياني لفئة الحلول لـ

$y \leqslant mx + b$

يتألف من نصف المستوى تحت الخط المستقيم

$y = mx + b$

والخط المستقيم نفسه (انظر الى شكل (9)) .



شكل (9)

مثال « ١ » :

استخدم الرسم البياني لتوضيح فئة حلول المتباينة

$$2x - 3y \leqslant 6$$

الحل :

ضع $2x - 3y \leqslant 6$ في صورة (ميل ـ تقاطع)

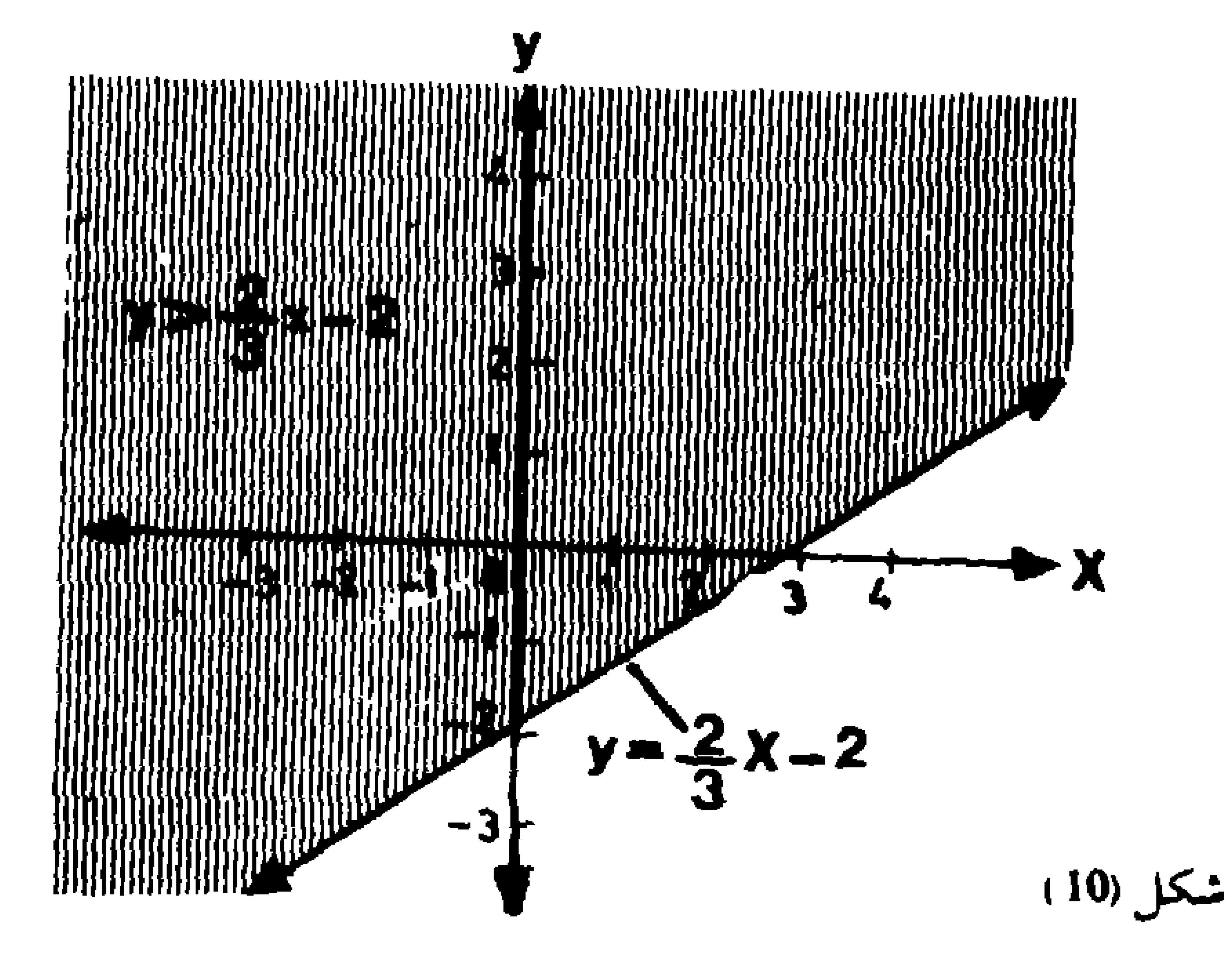
$$-3y \leqslant 6 - 2x$$

$$y \geqslant \frac{2}{3}x - 2$$

ارسم الآن

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

ثم ظلل نصف المستوى فوق هذا المستقيم (شكل (10)) .



شكل (10)

تمارين (٥) :

في المسائل من 1 الى 10 ارسم مجموعة الحلول للمتباينة .

1. $x + y \leq 4$
2. $x + y \geq -2$
3. $x - y \geq 2$
4. $x - y \leq -3$
5. $x + 2y \leq -4$
6. $x + 3y \geq 6$
7. $2x + 3y \geq -6$
8. $2x + 3y \leq -6$
9. $3x - y \leq 5$
10. $3x - y \geq 5$

(٤ ـ ٧) انظمة المتباينات الخطية :

لايجاد فئة الحلول لنظام مكون من متباينتين خطيتين او اكثر في متغيرين ، ارسم جميع المتباينات على نفس النظام الكرتيزي . تقاطع فئات الحلول (المنطقة المشتركة بين جميع فئات الحلول) للمتباينات هو فئة الحلول للنظام .

نفرض فيما يلي ان

$$x \geqslant 0$$

(فئة الحلول تتكون من محور y ونصف المستوى الواقع الى يمين المحور y) ونفرض ايضاً ان

$$y \geqslant 0$$

(فئة الحلول تتألف من محور x ونصف المستوى الواقع فوق محور x) لذا فان فئة الحلول للنظام .

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

هي الربع الأول من المستوى الكرتيزي ونقطة الأصل والجزء غير السالب من المحاور . (تعتبر هذه القيود مناسبة وخاصة في دراسة البرمجة الخطية) .

مثال « ٢ » :

ارسم النظام

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

$$x + y \leqslant 4$$

$$2x - y \geqslant 2$$

الحل :

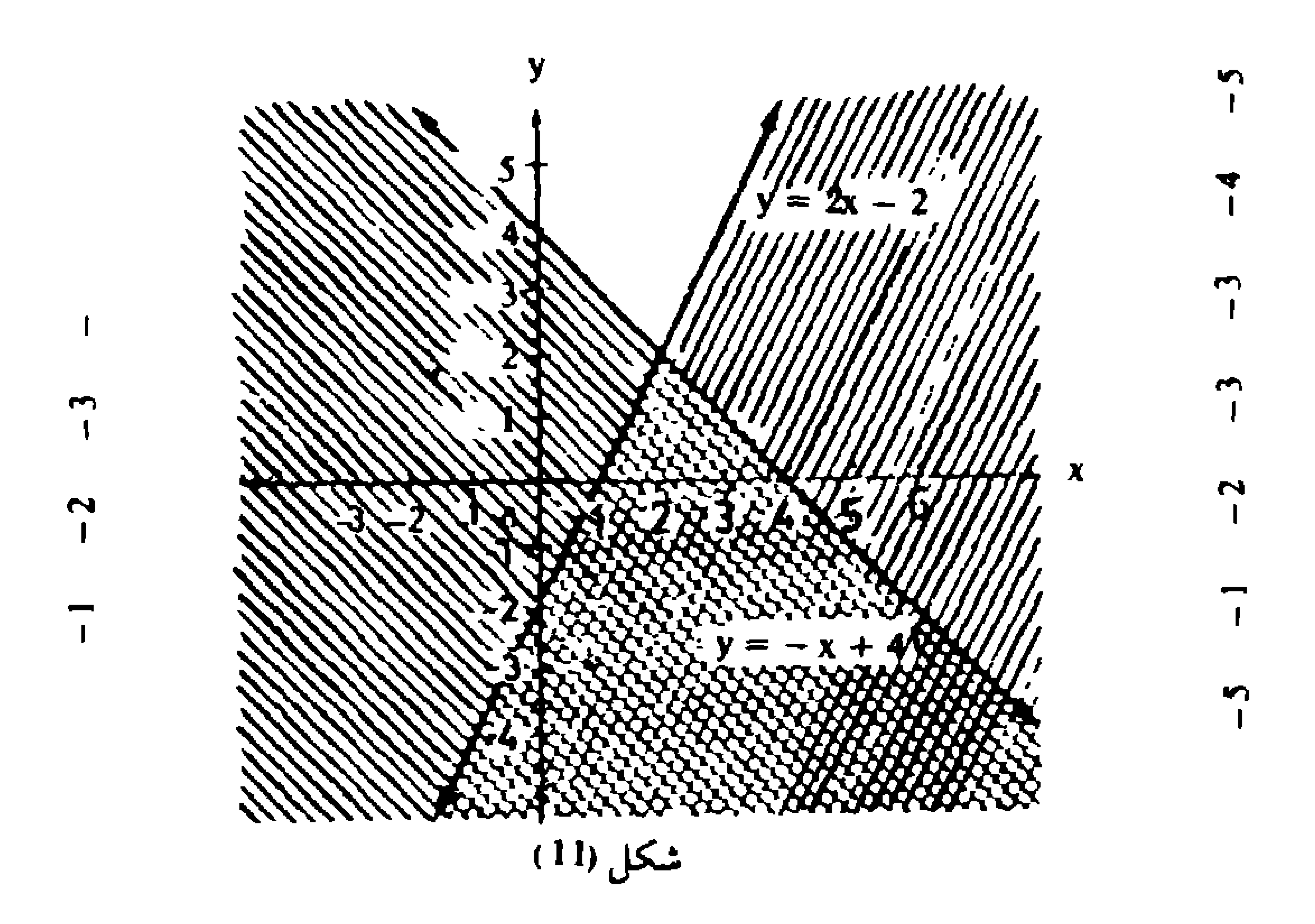
نضع $x + y \leqslant 4$ في صورة (ميل ـ تقاطع)

$$y \leqslant -x + 4$$

وبالمثل يمكن كتابة $2x - y \geq 2$ بشكل

$$y \leq 2x - 2$$

نرسم الآن هاتين المتباينتين على نفس النظام الاحداثي كما هو مبين في شكل (11)



شكل (11)

(ملاحظة) :

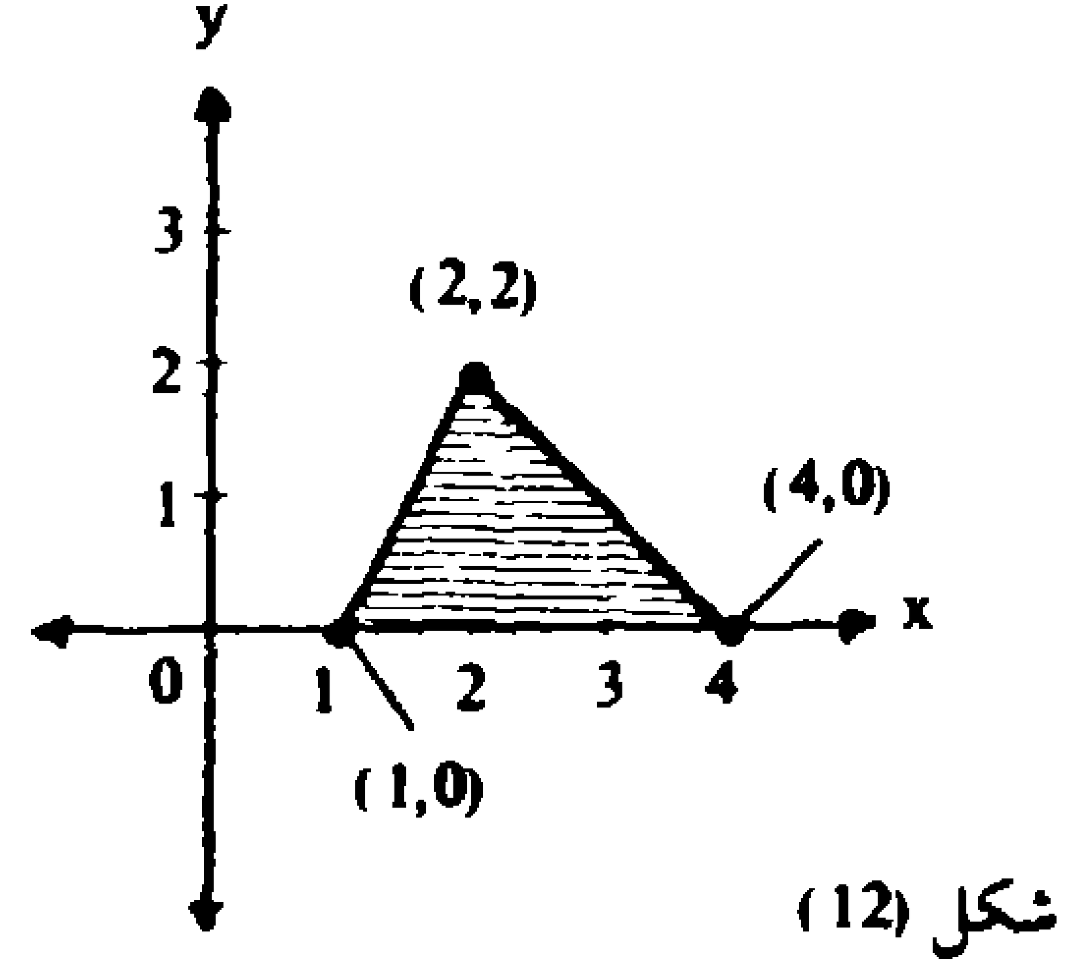
استعمل تظليلا موازياً للخطوط حتى يمكن رؤية التقاطع بسهولة . بما أن

$$x \geq 0$$

و

$$y \geq 0$$

فان حل النظام المكون من جميع المتباينات الأربعة هو مثلث واقع في الربع الأول كما هو مبين في شكل (12) .



شكل (12)

تمارين (٦) :

في المسائل التالية ارسم أنظمة المتباينات الخطية المعطاة .

11. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$

12. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$

13. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 8$, $x - y \geq 2$

14. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 8$, $x - y \leq 2$

15. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x - y \geq 2$

16. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x - y \leq -3$

17. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$, $2x + 3y \leq 12$

18. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 5$, $2x + 3y \geq 12$

(٤ ـ ٨) مبادىء البرمجة الخطية :

في كثير من التطبيقات في الاقتصاد والادارة والعلوم يكون هدف الباحث ايجاد الحل الأمثل (أي القيمة الصغرى او القيمة العظمى) لدالة ما تحت شروط (أو قيود) معينة . اذا كان من الممكن التعبير عن هذه القيود بواسطة متباينات خطية والهدف بمعادلة خطية ، فيمكن استخدام طريقة تسمى بالبرمجة الخطية لايجاد الحل الأمثل لدالة الهدف .

لنفرض انك مدير لشركة صغيرة تنتج منتجين احدهما عادي والثاني ممتاز . تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج العادي ريال واحد وتكلفة الوحدة الواحدة من المنتج الممتاز ريالين ، فاذا كان الطلب على هذه المنتجات يقتضي عدم انتاج اكثر من 300 وحدة من المنتجين ، وبسبب اعتبارات مالية كانت تكاليف الانتاج يجب الا تزيد عن 500 ريالاً . أضف لذلك ان عدد الوحدات العادية يجب ألا يزيد عن عدد الوحدات الممتازة بأكثر من 100 وحدة . لكي تترجم هذه القيود الى صورة رياضية نفرض ان

عدد وحدات المنتج الممتاز = x

عدد وحدات المنتج العادي = y

وحيث ان عدد الوحدات المنتجة لا يمكن ان يكون سالباً فان

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

حيث ان تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج العادي ريال واحد ، إذاً تكلفة كل الوحدات العادية يساوي y ريالاً .

وحيث ان تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج الممتاز 2 ريال اذا تكلفة x وحدة من المنتج الممتاز هي $2x$ ريالاً .

وحيث ان التكلفة الكلية هي حاصل جمع تكلفة المنتج العادي + المنتج الممتاز ، اذاً التكلفة الكلية تساوي $y + 2x$. وبناء على الاعتبارات المالية التي تفرض علينا ان لا تزيد التكلفة عن 500 ريال . نجد ان

$$y + 2x \leqslant 500$$

وحيث ان قيد الطلب يفرض علينا ان لا يزيد حجم الانتاج من المنتجين عن 300 وحدة ، إذاً

$$y + x \leq 300$$

وحيث ان عدد الوحدات العادية لا يزيد عن الوحدات الممتازة بأكثر من 100 وحدة ، إذاً

$$y \leq x + 100$$

أي ان

$$y - x \leq 100$$

إذا كان ربح الوحدة الواحدة من المنتج الممتار ثلاثة ريالات وربح الوحدة الواحدة من المنتج العادي ريالين ، ونرغب في الحصول على اكبر ربح ممكن تحت القيود السابقة وحيث ان ربح الوحدة الواحدة من المنتج الممتاز ثلاثة ريالات إذاً الربح من x من الوحدات الممتازة هو $3x$ ريال . وحيث ان ربح الوحدة من المنتج العادي ريالان ، إذاً ربح y وحدة من المنتج العادي هو $2y$ ريال .

نفرض ان الربح الكلي هو R .

إذاً

$$R = 3x + 2y$$

إذاً يمكننا كتابة المسألة السابقة في الصورة الرياضية التالية . أوجد اكبر قيمة للربح R

$$R = 3x + 2y$$

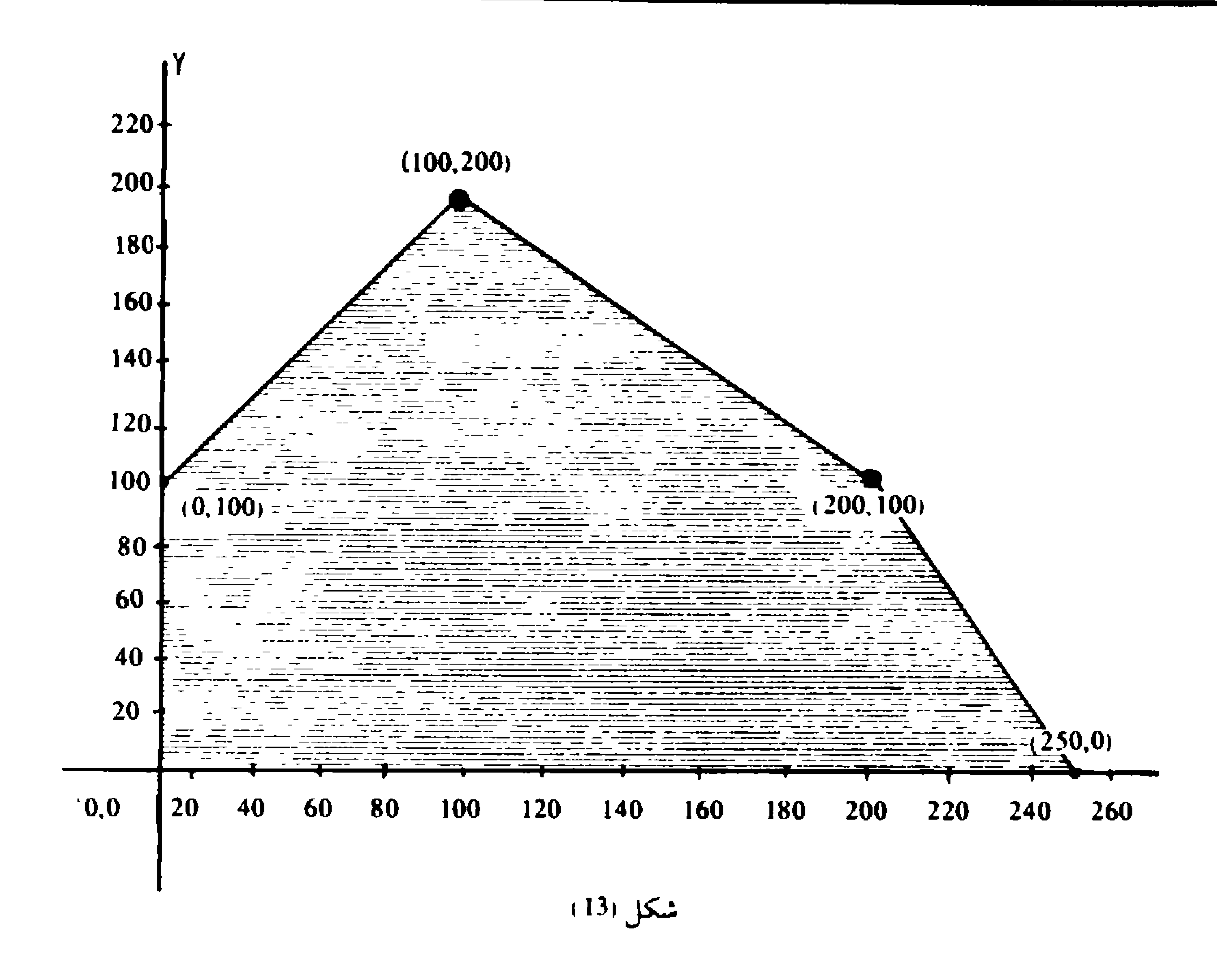
تحت القيود

$$y + 2x \leq 500$$

$$y + x \leq 300$$

$$y - x \leq 100$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$



شكل (13)

الحل :

حل هذا النظام هو جميع الأزواج المرتبة (x,y) التي تحقق القيود الأربعة السابقة معاً . والسؤال الآن هل توجد ازواج مرتبة (x,y) تفي بالقيود الأربعة السابقة وتكون الحل الأمثل لدالة الهدف ؟ أي اننا نبحث عن زوج (x,y) يفي بالقيود ويعطي اكبر قيمة للمقدار R ؟ اذا كان الأمر كذلك فما هو هذا الزوج ؟

للاجابة على ذلك نحتاج الى القاعدة التالية للبرمجة الخطية .

القاعدة الأساسية للبرمجة الخطية
القيمة المثلى (ان وجدت) لدالة الهدف تحدث في احد نقاط اركان فئة الأزواج المرتبة التي تفي بالقيود .

(القيمة المثلى لدالة الهدف هي اصغر او اكبر قيمة تفي بالقيود)

لذلك فما عليك إلا أن تحسب قيمة دالة الهدف

$$R = 3x + 2y$$

في جميع نقاط اركان فئة الحلول ثم اختيار النقط الركنية التي تعطى أكبر قيمة لدالة الهدف .

قيمة دالة الهدف	احداثيات النقاط الركنية
$R = 3(0) + 2(0) = 0$	(0,0)
$R = 3(0) + 2(100) = 200$	(0,100)
$R = 3(100) + 2(200) = 700$	(100, 200)
$R = 3(200) + 2(100) = 800$	(200, 100)
$R = 3(250) + 2(0) = 750$	(250, 0)

النتيجة نحصل على اكبر قيمة للربح R

R = 800(ريال)

عندما تنتج 200 = x من الوحدات الممتازة و 100 = y وحدة عادية .

مثال « ٣ » :

شركة كمبيوتر تشتري نوعين A و B من اجزاء الكمبيوتر التي تتكلف 4 ، 5 ريالات على التوالي . يحتاج المشرف على الانتاج 30 وحدة على الاقل منهما معاً . فاذا علمت ان عدد وحدات A مضافاً اليه ضعف عدد وحدات B يساوي 40 وحدة على الأقل ، فأوجد عدد الوحدات التي يجب شراؤها من A و B للحصول على اقل تكلفة ممكنة .

الحل :

افرض ان

x = عدد وحدات ' A '

y = عدد وحدات ' B '

إذاً دالة الهدف C هي :

$C = 4x + 5y$ (ريال)

القيود

$x \geq 0$

$y \geq 0$

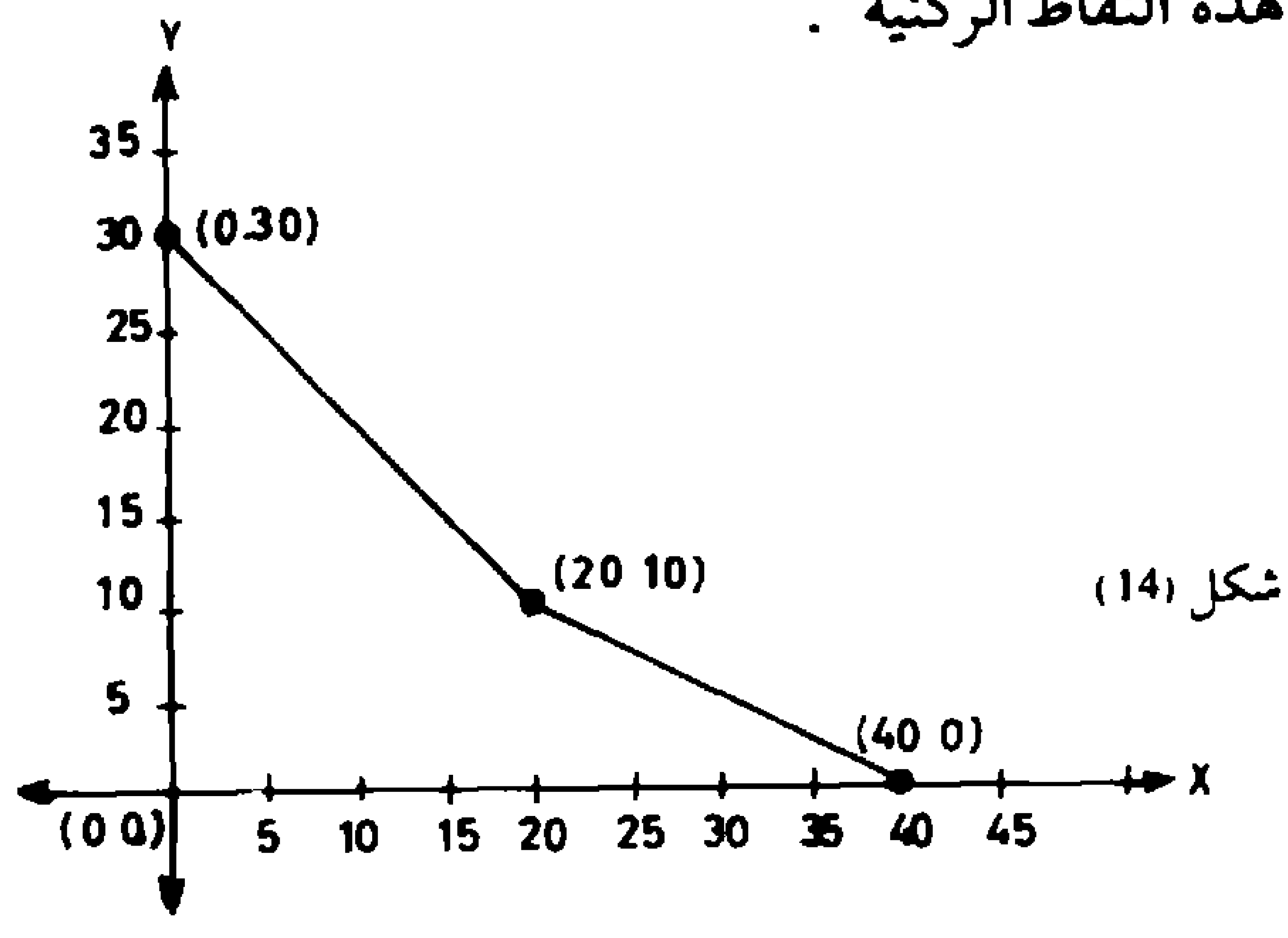
$x + y \geq 30$

$x + 2y \geq 40$

اوجد الآن فئة الأزواجِ المرتبة التي تفي بهذه القيود ثم اوجد النقاط الركنية في الشكل (14) ، ثم احسب قيمة التكلفة .

$c = 4x + 5y$

في كل من هذه النقاط الركنية .



شكل (14)

احداثيات النقاط الركنية	قيمة دالة الهدف
(0,30)	$C = 4(0) + 5(30) = 150$
(20,10)	$C = 4(20) + 5(10) = 130$
(40,0)	$C = 4(40) + 5(0) = 160$

∴ أقل تكلفة هي $C = 130$ وتحدث عندما تشتري الشركة $x = 20$ من وحدات A ، $y = 10$ من وحدات B .

يمكن تلخيص طريقة البرمجة الخطية فيما يلي :

الخطوة الأولى : حدد متغيرات دالة الهدف .

الخطوة الثانية : اكتب المشكلة بالرموز الرياضية .

الخطوة الثالثة : ارسم الرسم البياني لنظام القيود (المتباينات) .

الخطوة الرابعة : اوجد جميع رؤوس فئة الحلول التي نحصل عليها من الخطوة الثالثة .

الخطوة الخامسة : احسب قيمة دالة الهدف في كل من هذه الرؤوس او النقاط الركنية .

الخطوة السادسة : اختر الحل المناسب .

مثال « ٤ » :

اوجد أصغر قيمة لـ $z = 2x + 4y$

تبعاً للقيود

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

$$3x + 2y \geqslant 8$$

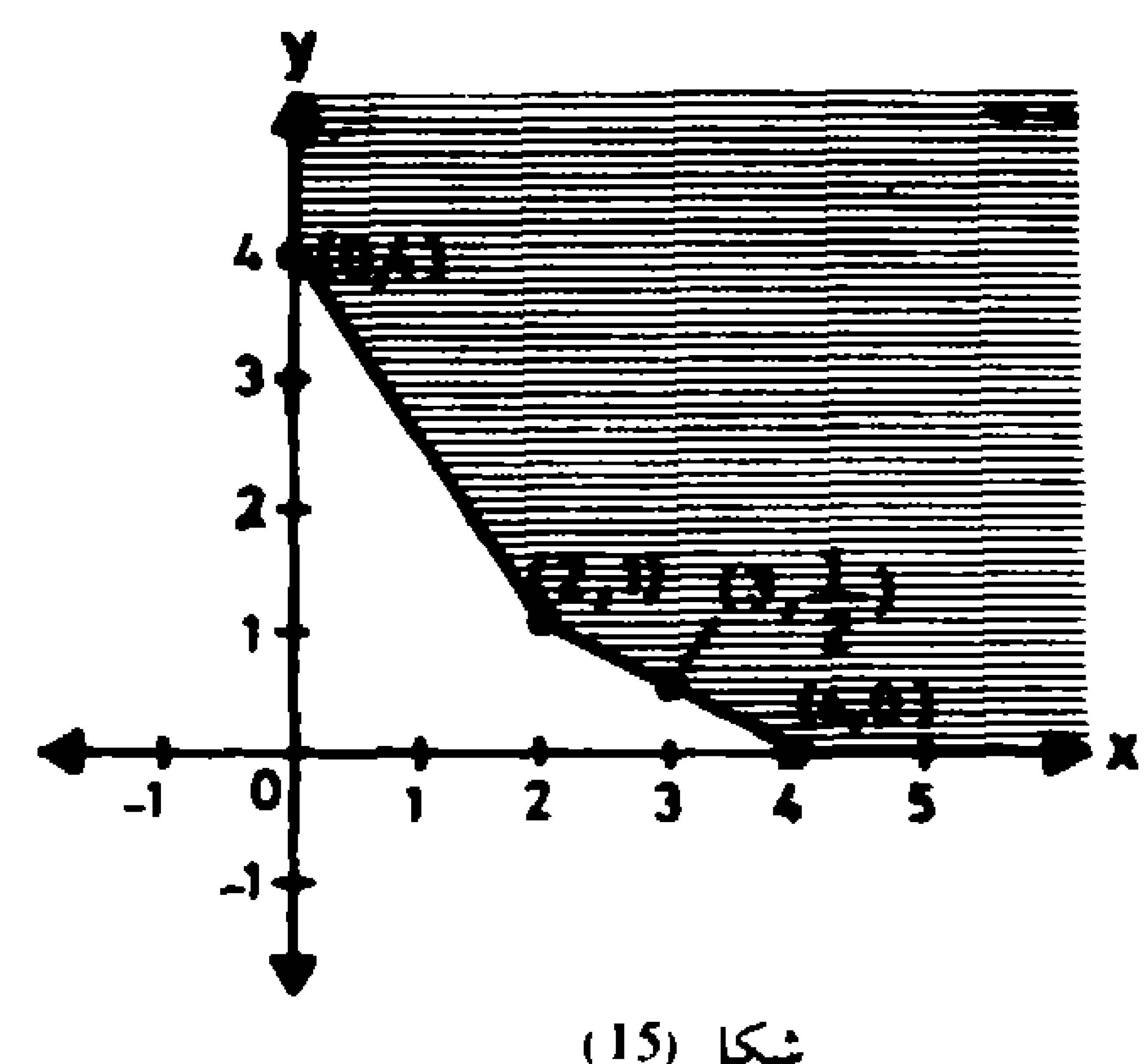
$$x + 2y \geqslant 4$$

الحل :

نرسم اولا فئة حلول القيود ونحدد جميع النقاط الركنية فيها (الشكل (15)) ، ثم نحسب قيم الدالة

$$z = 2x + 4y$$

في كل من هذه النقاط الركنية



شكل (15)

$$(0,4),\ z = 2(0) + 4(4) = 16$$

$$(2,1)\ z = 2(2) + 4(1) = 8$$

$$(4,0),\ z = 2(4) + 0 = 8$$

أصغر قيمة لـ z هي 8 وتحدث في النقطتين (4,0) ، (2,1). وفي جميع النقاط الواقعة على الخط الواصل بينهما.

تمارين (٧) :

في المسائل (1 - 12) استخدم الرسم في حل مشاكل البرمجة الخطية

1. اوجد اكبر قيمة لدالة الهدف

$$z = x + y$$

تبعاً للقيود

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

$$3x + y \leqslant 10$$

$$x + 2y \leqslant 10$$

2. اوجد اقل قيمة لدالة الهدف

$z = x + y$

تبعاً للقيود

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + y \geq 10$

$x + 3y \geq 10$

3. اوجد اكبر قيمة لدالة الهدف

$z = 6x + y$

تبعاً للقيود

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$3x + y \leq 10$

$x + 2y \leq 10$

4. اوجد اقل قيمة لدالة الهدف

$z = x + 5y$

تبعاً للقيود

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + y \geq 10$

$x + 3y \geq 10$

5. اوجد اكبر قيمة لدالة الهدف

$z = x + 4y$

تبعاً للقيود

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$3x + y \leq 10$

$x + 2y \leq 10$

6. اوجد اقل قيمة لدالة الهدف

$$z = 3x + y$$

تبعاً للقيود

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

$$2x + y \geqslant 10$$

$$x + 3y \geqslant 10$$

7. اوجد اكبر قيمة لدالة الهدف

$$z = x + 2y$$

تبعاً للقيود

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

$$x - 3y \geqslant -24$$

$$2x + y \geqslant 8$$

$$2x + 3y \geqslant 16$$

$$5x + 3y \leqslant 60$$

8 . اوجد اكبر قيمة لدالة الهدف $z = 3x + y$ مستخدماً نفس قيود مسألة (٧) .

9 . اوجد اكبر قيمة لدالة الهدف $z = 20x + 30y$ مستخدماً نفس قيود مسألة (٧) .

10. اوجد اقل قيمة لدالة الهدف $z=x+2y$ مستخدماً نفس قيود مسألة (٧) .

11. اوجد اقل قيمة لدالة الهدف $z = 3x+y$ مستخدماً نفس قيود مسألة (٧)

12. اوجد اقل قيمة لدالة الهدف $z = 20x+30y$ مستخدماً نفس قيود مسألة (٧) .

13. تقوم شركة بانتاج نوعين من المنتجات A ، B ؛ كل وحدة من A تباع بـ2 ريال وكل وحدة من B تباع بـ 1 ريال . الانتاج الكلي لـ A ، B يجب ألا يزيد عن 30

وحدة . وعدد الوحدات من A مضاف اليها ضعف عدد وحدات B يجب الا يزيد عن 40 وحدة .

اوجد عدد الوحدات من كل منتج يجب على الشركة ان تنتجها لكي تجعل العائد اكبر ما يمكن (افرض ان x عدد الوحدات من المنتج A ، y عدد الوحدات من المنتج B)

14. تقوم شركة بإنتاج نوعين من المنتجات B, A تكلفة إنتاج كل وحدة منها 1 ريال، وتبعاً لشروط السوق يجب أن لا يقل اجمالي عدد الوحدات عن 100 ولا يزيد عن 500. وكذلك عدد الوحدات من A مطروحاً منها عدد الوحدات من b يجب ألا يزيد عن 100 وحدة، أوجد عدد الوحدات التي تنتج من كل من A ، B لكي تكون التكاليف أقل ما يمكن.

15. يحتاج كل شخص على الأقل 10 وحدات من فيتامين x و20 وحدة من فيتامين y و34 وحدة من فيتامين z هناك نوعان من الأطعمة تحتوي على هذه الفيتامينات.

	النوع A	النوع B
التكلفة لكل أوقية	6 هللة	8 هللة
فيتامين x لكل أوقية	1	5
فيتامين y لكل أوقية	5	2
فيتامين z لكل أوقية	6	4

أي تكوينة من هذه الأطعمة يجب ان يأكلها الشخص لكي تحقق له احتياجاته من الفيتامينات بأقل تكاليف .

16. تقوم شركة بانتاج نوعين من المنتجات A ، B كل منها يتكلف 4 ، 2 ريال على الترتيب بحيث ان الوحدات المنتجة من A مضاف اليها ضعف عدد الوحدات المنتجة من B يجب ألا يزيد عن 20 وضعف عدد الوحدات من A مضاف اليه عدد الوحدات من B يجب ان لا يزيد عن 16 . ما هي عدد الوحدات من A ، B التي يجب انتاجها ليكون العائد أكبر ما يمكن ؟

الباب الخامس

حَل أنظمَة المعَادلات الخطيّة

سوف ندرس في هذا الباب استخدام المصفوفات والمحددات في حل الأنظمة الخطية .

(٥ - ١) المصفوفات :

المصفوفة (Matrix) تنظيم بشكل مستطيل من الأعداد والمتغيرات . فمثلا

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & x & 7 \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة مكوّنة من صفين (Row) وثلاثة اعمدة (Column) . كل عدد منها يسمى عنصراً .

فالصف الأول مكوّن من العناصر

$2 \quad 3 \quad 0$

والصف الثاني مكوّن من العناصر

$-1 \quad x \quad 7$

والأعمدة مكوّنة كما يلي :

العمود الثالث	العمود الثاني	العمود الأول
0	3	2
7	x	−1

ويقال ان هذه المصفوفة من رتبة 2x3 . وبصورة عامة عندنا التعريف التالي .

تعريف (١) :

اذا كان كل من m ، n عدداً طبيعياً فان اية مصفوفة من رتبة mxn هي أي تنظيم بشكل مستطيل على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث a_{ij} عدد حقيقي يمثل العنصر الموجود في الصف رقم i والعمود رقم j . ورتبة هذه المصفوفة هي mxn .

فيما يلي أمثلة اخرى من المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

المصفوفات

A, B, C, D, E

هي من رتبة

1x3, 3x1, 2x2, 4x2, 2x4

على التوالي .

اذا راجعنا كيفية حل الأنظمة الخطية بطريقة الحذف لوجدنا ان اهمية الرموز المستخدمة للمتغيرات تعتبر قليلة جداً في حل هذه الأنظمة وذلك بالمقارنة بأهمية معاملات هذه المتغيرات (الموجودة في الجهة اليسرى) وأهمية الحدود المطلقة الموجودة في الجهة اليمنى . ففي النظام الخطي .

$$x - y - z = 1$$
$$2x - 3y + z = 10$$
$$x + y - 2z = 0$$

يمكننا الاستغناء عن كتابة الرموز x وy وz اذا كان من الممكن معرفة اي. المعاملات تعود الى أي من المتغيرات . للوصول الى هذا يمكننا ان تمثل الجهة اليسرى من النظام الخطي بواسطة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

حيث تسمى هذه المصفوفة مصفوفة المعاملات .

اما اذا أردنا ان نشمل الجهة اليمنى مع الجهة اليسرى فنوسع هذه المصفوفـة كما يلي :

$$(A/B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الموسعّة Augmented Matrix

تمارين (١) :

في التمارين من 1 الى 6 افرض ان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [1 \quad 2 \quad 3], \; C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad , F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1. أذكر رتبة كل مصفوفة .
2. اذكر اياً من هذه المصفوفات مصفوفة مربّعة .
3. في المصفوفة D اكتب قيمة كل من العناصر التالية :

d_{21} ، d_{11} ، d_{33}

4. اذكر أياً من هذه المصفوفات متساوية .
5. لماذا المصفوفة B لا تساوي المصفوفة C .

6. اذا كانت $C = E$ فان

$a =$ $\quad$ $, b =$ $\quad$ $, c =$

7. اكتب كلاً من الأنظمة الخطية التالية بالصورة المصفوفية .

(a)
$$x + y = 5$$
$$2x - y = 1$$

(b)
$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 = 16$$

(c)
$$x + y + z = 4$$
$$-y + 2z = 1$$
$$x + y = 2$$

(d)
$$x_1 + x_3 = 5$$
$$x_2 - 2x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

(e)
$$x = 4 - y$$
$$x + 2 = y$$

(f)
$$2x + y = 3 - z$$
$$x = 3 + z - y$$
$$x + z = 3$$

(٥ ـ ٢) استخدام المصفوفات في حل الأنظمة الخطية :

سبق ودرسنا في الباب الرابع كيفية حل نظام خطي بطريقتي الحذف والتعويض . ونعود في هذا الفصل الى استخدام طريقة الحذف في حل الأنظمة الخطية ونقوم بتوسيع هذه الطريقة لتوصلنا الى استنباط طريقة لاستخدام المصفوفات في حل الأنظمة الخطية . المثال التالي يوضّح هذه الطريقة .

مثال (١) :

حل النظام الخطي التالي

$R_1 : \; 2x + y = 3$

$R_2 : \; x + y = 2$

الحل :

لغرض التوضيح نعيد كتابة النظام الخطي مع كتابة جميع المعاملات .

التمثيل بالمصفوفة الموسعّة	المشكلة الجبرية
$(A / B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$R_1 : \; 2x + 1y = 3$ $R_2 : \; 1x + 1y = 2$

الحدود المطلقة (المصفوفة B) ← العمود الأخير

المصفوفة: معاملات y ، معاملات x

بضرب R_2 في 2− والاستعاضة عن R_2 بحاصل الضرب الناتج نحصل على

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} R_1 &: \; 2x + 1y = 3 \\ R_2 &: \; -2x - 2y = -4 \end{aligned}$$

بجمع R_1 و R_2 واستبدال R_2 بالمجموع الناتج نحصل على

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} R_1 &: \; 2x + 1y = 3 \\ R_2 &: \; 0x - 1y = -1 \end{aligned}$$

بجمع R_1 و R_2 واستبدال R_1 بالمجموع الناتج نحصل على

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_1 : 2x + 0y = 2 \\ R_2 : 0x - 1y = -1 \end{array}$$

بضرب R_1 في $(\frac{1}{2})$ و R_2 في (-1)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_1 : 1x + 0y = 1 \\ R_2 : 0x + 1y = 1 \end{array}$$

نستنتج من المعادلة R_1 ان

$$x = 1$$

ونستنتج من المعادلة R_2 ان

$$y = 1$$

أي ان حل النظام الخطي هو

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

نرى مما سبق ان عمليات الجمع والضرب المتتالية تقودنا الى الوصول الى حل النظام الخطي . بدراسة المصفوفات الموسعّة يتضّح كذلك انه كان بالامكان اجراء عمليات الجمع والضرب هذه على صفوف المصفوفات الموسعّة حتى نحصل على مصفوفة من نمط

$$(I \mid C) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

والتي تعطى الحل للنظام الخطي هو

$$x = a \quad , \quad y = b$$

تسمى هذه الطريقة بطريقة Gauss Jordan

تسمى العمليات الحسابية على صفوف المصفوفة بالعمليات الصفية الأولية . فيما يلي ثلاث من هذه العمليات :

١ - استبدال صفين كل مكان الآخر .

٢ - ضرب جميع عناصر اي صف بعدد ثابت يختلف عن الصفر .

٣ - جمع صفين واستبدال أي من الصفين بحاصل الجمع الناتج .

ويمكن التعبير بالرموز عن العمليات الصفية التي اجريت في المثال السابق كما يلي :

١ - اضرب الصف الثاني في 2- ثم استبدل الصف الثاني بحاصل الضرب الناتج

$-2R_2 \rightarrow R_2$

٢ - اجمع الصف الأول والصف الثاني ثم استبدل الصف الثاني بحاصل الجمع الناتج

$R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

٣ - اجمع الصف الأول والصف الثاني ثم استبدل الصف الأول بحاصل الجمع الناتج

$R_1 + R_2 \rightarrow R_1$

٤ - اضرب الصف الأول في $\frac{1}{2}$ واستبدل الصف الأول بحاصل الضرب الناتج واضرب الصف الثاني في 1- واستبدل الصف الثاني بحاصل الضرب الناتج

$\frac{1}{2} R_2 \rightarrow R_2$

$-1\, R_2 \rightarrow R_2$

الأمثلة التالية تبيّن تأثير العمليات الصفية الأوّلية على اية مصفوفة

العملية الصفية الأولى

يمكن استبدال أي صفين كل مكان الآخر

مثال :

المصفوفة الأصلية

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \longrightarrow R_2$$

المصفوفة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

العملية الصفية الثانية

يمكن ضرب عناصر أي صف بأي عدد ثابت يختلف عن الصفر

مثال :

المصفوفة الأصلية

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad -2R_3 \rightarrow R_3$$

المصفوفة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

العملية الصفية الثالثة

يمكن جمع أي صفير ثم استبدال اي منهما بحاصل الجمع الناتج . يجب ان يعاد الصف غير المستبدل الى صيغته الأصلية وفي مكانه الأصلي .

مثال :

المصفوفة الأصلية

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

المصفوفة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملحوظة :

غالباً ما تستعمل العملية الصفية الثانية والعملية الصفية الثالثة سوياً . او بعبارة اخرى يضرب احد الصفوف في عدد ويضاف الى صف آخر .

مثال :

المصفوفة الأصلية

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

المصفوفة الجديدة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

سنقوم الآن بدراسة مثال آخر لبيان كيفية حل الأنظمة الخطية باستخدام المصفوفات .

مثال « ٢ » :

استخدم المصفوفات لحل النظام الخطي

$$R_1 : 2x + 3y = 6$$

$$R_2 : x - y = 2$$

الحل :

عبّر عن النظام باستخدام المصفوفات .

العملية الصفية التي تؤدي الى المصفوفة التالية   المصفوفة

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad -1R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{array}\right] \quad -\frac{2}{5}R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{24}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right]$$ بالتبسيط

... حل النظام الخطي هو

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right] = (I/C)$$

$$x = 2\frac{2}{5} \quad , \quad y = \frac{2}{5}.$$

طريقة حاوس ـ جوردن مفيدة بصورة خاصة في حل الأنظمة الخطية التي تحتوي على ثلاث او اكثر من المعادلات الخطية وذلك باستخدام عمليات حسابية بسيطة فقط للوصول الى الحل . في حالة ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات x, y, z يجب ان نصل الى المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

والتي تعطي

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

مثال « ٣ » :

حل النظام الخطي

$$R_1 : \quad x - y + z = 1$$

$$R_2 : \quad 2x \qquad - z = 2$$

$$R_3 : \qquad\quad y + z = 3$$

الحل :

العمليات	المصفوفة
$-2R_1 + R_2 \to R_2$	$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$
$R_2 \to R_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$
$R_1 + R_2 \to R_1$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$
$-2R_2 + R_3 \to R_2$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$
$-\frac{1}{5} R_3 \to R_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]$
$-1R_3 + R_2 \to R_2$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$
$-2R_3 + R_1 \to R_1$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right| = (I\,|\,C)$$

$$x = \frac{8}{5}, y = \frac{9}{5}, z = \frac{6}{5} .$$

تصنيف الأنظمة الخطية

اذا كانت المصفوفة الناتجة تحتوي على اي صف من شكل

$$(0 \quad 0 \ldots \quad 0 \,|\, \quad b) \quad , \quad b \neq 0$$

فان النظام الخطي غير متسق inconsistent وليس لذلك النظام أي حل

اذا كانت المصفوفة الناتجة تحتوي على أي صف من شكل

$$(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,|\, 0)$$

فان النظام متسق ومعتمد Dependent وأن للنظام عدد لا نهاية له من الحلول .

ربما تكون طريقة المصفوفات في حل الأنظمة الخطية اكثر الطرق استعمالاً بسبب ملاءمتها لاستخدام الكمبيوتر . لاحظ ان طريقة المصفوفات تستعمل في نظام جميع معادلاته مكتوبة بالصيغة القياسية

$$ax + by + cz = d .$$

أي أن النظام

$$\begin{aligned} x + z &= 1 + y \\ 2x \quad &= z + 2 \\ 0 &= 3 - y - z \end{aligned}$$

يجب ان يعبر عنه بالشكل

$$\begin{aligned} x \quad - y + z &= 1 \\ 2x \qquad - z &= 2 \\ y + z &= 3 \end{aligned}$$

وذلك قبل البدء باستخدام المصفوفات في الوصول الى الحل .

مثال « ٤ » :

ترغب شركة كيماوية في خلط نتروجين وحامض الفوسفوريك والبوتاس للحصول على (3600) رطل من السماد الكيماوي . اذا كان وزن النتروجين يعادل ثلاثة امثال وزن حامض الفوسفوريك ، وكان مجموع كمية حامض الفوسفوريك والبوتاس هو (1200) رطلاً ، أوجد عدد الأرطال المطلوبة من كل من المواد الكيماوية الثلاثة .

الحل :

افرض أن

$x =$ عدد أرطال النتروجين .

$y =$ عدد أرطال حامض الفوسفوريك .

$z =$ عدد أرطال البوتاس .

النظام الخطي الذي يناسب المسألة هو

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3600 \\ x - 3y &= 0 \\ y + z &= 1200 \end{aligned}$$

ويحل هذا النظام باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3600 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad -1R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3600 \\ 0 & -4 & -1 & -3600 \\ 0 & 1 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{4} R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3600 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 900 \\ 0 & 1 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -1R_2 + R_1 \to R_1 \\ -1R_2 + R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 2700 \\ 0 & 1 & 0 & 900 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 300 \end{array}\right] \quad \frac{1}{3}R_1 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 2700 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 900 \\ 0 & 0 & 1 & 400 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -\frac{1}{4}R_3 + R_2 \to R_2 \\ \frac{3}{4}R_3 + R_1 \to R_1 \end{array}$$

800 رطل حامض الفوسفوريك

2400 رطل نتروجين

400 رطل بوتاس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2400 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 400 \end{array}\right]$$

ملحوظة :

من الممكن اجراء اية سلسلة من العمليات الصفية التي تؤدي الى الحصول على الشكل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في حالة معادلتين بمتغيرين والشكل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

في حالة ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات وذلك في الجزء الأيسر من المصفوفة الموسعة . ولكن الخبرة علمتنا بأنه بصورة عامة احسن طريقة هي الحصول أولاً على 1 في العنصر الواقع في الصف الأول والعمود الأول . ثم نضرب الصف الأول بسالب العنصر في الصف الثاني والعمود الأول ثم جمع الناتج الى الصف الثاني ثم استبدل الصف الثاني بحاصل الجمع الناتج ، ثم اضرب الصف الأول بسالب العنصر الواقع في الصف الثالث والعمود الأول واجمع الناتج مع الصف الثالث ثم استبدل الصف الثالث بحاصل الجمع الناتج . بذلك تكون عناصر العمود الأول

1

0

0

على التوالي ، وهي الصيغة المرغوبة .

الآن نحصل على 1 في العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الثاني ونستخدم طريقة مماثلة للطريقة السابقة للحصول على أصفار في المواضع الأخرى من العمود الثاني .

الآن نحصل على 1 في الصف الثالث والعمود الثالث ونكرر العملية للحصول على أصفار في جميع المواضع الأخرى .

في حالة نظام خطي مكوّن من ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات تحتاج الى تسع خطوات على اكثر حد للوصول الى النتيجة النهائية . وهذه الخطوات مع الترتيب مبينة ادناه

$$\begin{bmatrix} 1_{\text{١}} & 0_{\text{٥}} & 0_{\text{٩}} \\ 0_{\text{٢}} & 1_{\text{٤}} & 0_{\text{٨}} \\ 0_{\text{٣}} & 0_{\text{٦}} & 1_{\text{٧}} \end{bmatrix}$$

تمارين (٢) :

في التمارين (1 - 12) استخدم طريقة جاوس ـ جوردن لحل النظام الخطي

1. $R_1: x - y = 3$
   $R_2: x + y = 1$

2. $R_1: x + y = -3$
   $R_2: x - y = -5$

3. $R_1: x + y = 5$
   $R_2: 2x + 3y = 12$

4. $R_1: x + 2y = 8$
   $R_2: 2x + 3y = 11$

5. $R_1: x + y = 1$
   $R_2: x - 3y = 3$

6. $R_1: x - y = 1$
   $R_2: 2x + y = 0$

7. $R_1: 2x + y = -3$
   $R_2: x - 2y = 11$

8. $R_1: 3x + 2y = 3$
   $R_2: 3x - 4y = -10$

9. $R_1: x + y + z = 2$
   $R_2: y - z = 2$
   $R_3: x - y = 1$

10. $R_1: x - y + z = 6$
    $R_2: y + z = -1$
    $R_3: x - z = 2$

11. $R_1: x + 2y - z = 6$
    $R_2: 2y + z = -1$
    $R_3: x - 2y = 2$

12. $R_1: y - 3z = 1$
    $R_2: 4x - y + 12z = 12$
    $R_3: y + 12z = -2$

في التمارين (13 - 16) استخدم طريقة المصفوفات لتصنيف النظام الخطي الى معتمد او غير متسق .

13. $R_1: x + y = 5$
    $R_2: X + y = -3$

14. $R_1: x + y + z = 3$
    $R_2: x + z = 1$
    $R_3: 2x + y + 2z = 2$

15. $R_1: 2x - y = 4$
    $R_2: x - \frac{1}{2}y = 2$

16. $R_1: x - y + z = 4$
    $R_2: y - 2z = 3$
    $R_3: x - z = 7$

(٥ ـ ٣) المحددات Determinants :

خلال الفصل الحالي والفصل القادم نفترض ان جميع المصفوفات مربّعة . لكل مصفوفة مربّعة A هناك عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة 'A ، ويرمز له بالرمز |A| أو det A . أكتشفت وطوّرت ودرست المحددات قبل المصفوفات بزمن طويل . سوف نستحدم المحددات في هذا الباب لحل الأنظمة الخطية .

بالنسبة للمصفوفة من رتبة 1 حيث

$$(1) \qquad A = [a_{11}]$$

يعرف المحدد لهذه المصفوفة حسب

$$|A| = a_{11}$$

وبالنسبة للمصفوفة من رتبة 2 حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فالمحدد لها يعرف بأنه

$$(2) \qquad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

هناك طريقة اخرى لكتابة محدد المصفوفة وهي ان نكتب عناصر المصفوفة ونستبدل أقواس المصفوفة بخطين عموديين . إذاً بهذا الترميز لدينا

$$(3) \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

بطريقة الترميز هذه من السهل ان نتذكر التعريف لأننا نجد حواصل ضرب الأقطار كما يلي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ونضع اشارة موجبة اذا كان النزول من اليسار الى اليمين واشارة سالبة اذا كان النزول من اليمين الى اليسار . وبهذه الطريقة نجد المجموع لايجاد قيمة المحدد .

مثال « ١ » :

اوجد محدد كل من المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = (3)(12) - (5)(6) = 36 - 30 = 6$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (-4)(6) - (-3)(2) = -24 + 6 = -18$$

$$|C| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (\frac{3}{2})(8) - (-4)(2) = 12 + 8 = 20.$$

لتعريف محددات مصفوفات من رتبة ٣ أو اكثر من الملائم ان تكون عندنا اصطلاحات اخرى .

تعريف « ٣ » :

افرض أن

$$(4) \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة من رتبة n فإن المحدد الصغير (المحيد) Minor M_{ij} للعنصر a_{ij} هو المحدد الذي نحصل عليه من حذف عناصر الصف i والعمود j.

مثال « ٢ » :

اوجد M_{11} و M_{23} و M_{31} للمصفوفة .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad (5)$$

الحل :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (-3)(7) - (-6)(1) = -21 + 6 = -15.$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (3)(0) = 2 - 0 = 2$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = (3)(-6) - (4)(-3) = -18 + 12 = -6.$$

تعريف «٣» :

افرض أن A مصفوفة رباعية كما في (4) فإن لمعامل المرافق A_{ij} للعنصر a_{ij} يعرف كما يلي:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (6)$$

من الواضح من (6) انه لايجاد المعامل المرافق للعنصر a_{ij} نجد المحدد الصغير للعنصر a_{ij} ثم نضربه في 1 او 1− معتمداً على كون i+j عدداً زوجياً أو فردياً .

مثال « ٣ » :

اوجد المعاملات المرافقة A_{11} ، A_{23} ، A_{31} للمصفوفة A في (5) .

الحل :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1)(-15) = -15$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(2) = -2$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1)(-6) = -6.$$

تمارين (٣) :

في المسائل من 1 الى 4 افرض ان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(١) أوجد محيددات عناصر المصفوفة

(a) M_{21} (b) M_{23} (c) M_{32} (d) M_{43}

(٢) أوجد المعاملات المرافقة لعناصر المصفوفة

(a) A_{21} (b) A_{23} (c) A_{32} (d) A_{43}

(٣) أوجد محيددات عناصر المصفوفة

(a) M_{11} (b) M_{22} (c) M_{31} (d) M_{42}

(٤) أوجد المعاملات المرافقة لعناصر المصفوفة

(a) A_{11} (b) A_{22} (c) A_{31} (d) A_{44}

في المسائل من 5 الى 10 اوجد قيم المحددات التالية :

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

(٥ ـ ٤) محدد المصفوفة من رتبة ٣ :

المحدد $|A|$ للمصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{7}$$

من رتبة ٣ يعرف بأنه

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \tag{8}$$

حيث ان A_{ij} هي المعاملات المرافقة للعناصر a_{ij} .

لنحسب حتى نرى شكل المقدار في الجهة اليمنى .

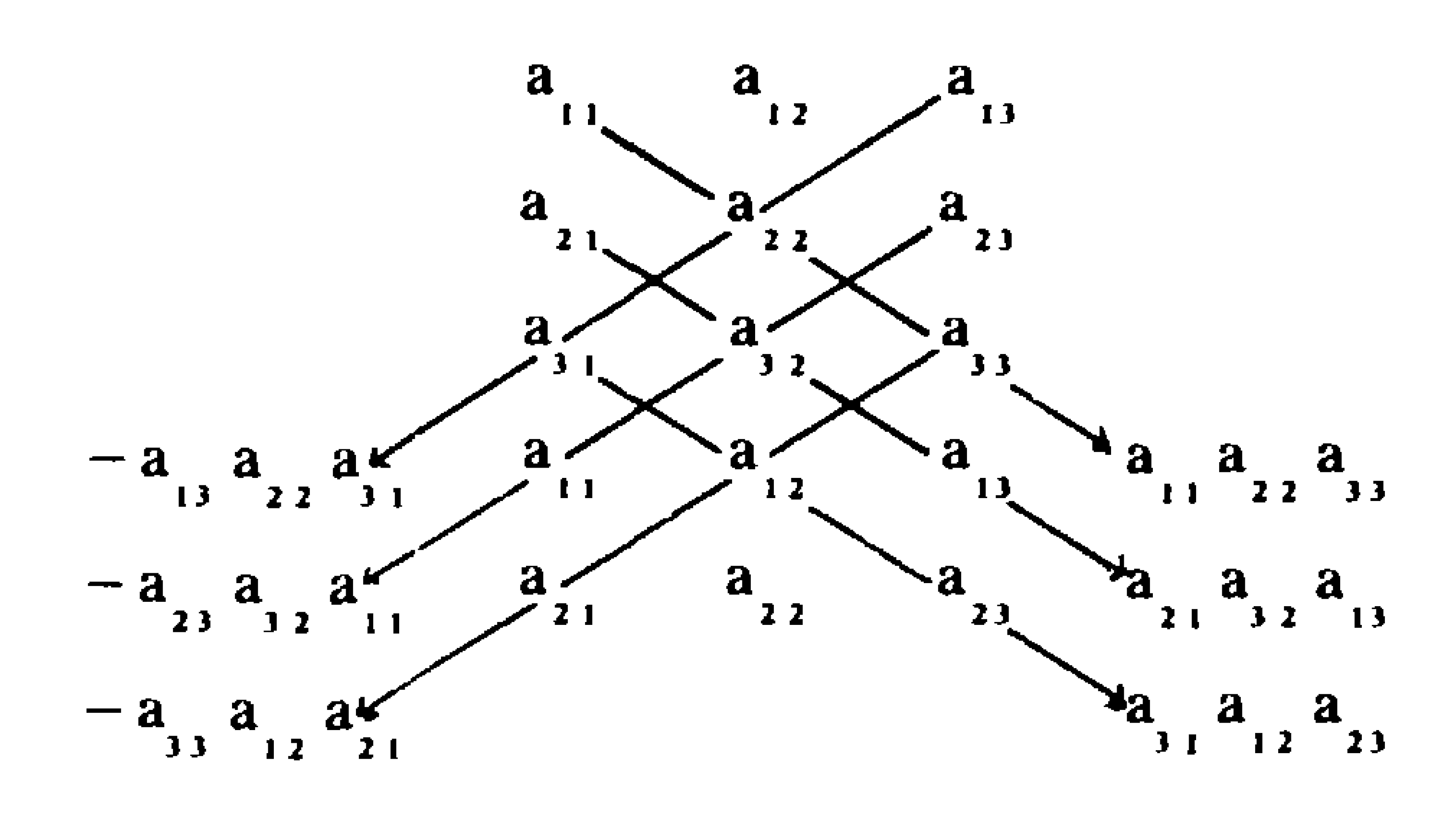
$$\begin{aligned} (9) \quad |A| &= a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} \\ &= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad |A| &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ &\quad + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} . \end{aligned}$$

الجهة اليمنى من (10) تسمى مبسط المحدد . فيما يلي طريقة بسيطة لكتابة مفكوك اي محدد من الرتبة ٣ .

(١) أكتب الصف الأول مرة اخرى تحت الصف الثالث ثم اكتب الصف الثاني تحت هذا الصف .

(٢) كون حواصل ضرب على طول العناصر الواقعة في الأقطار كما هو مبيّن بالأسهم .



(٣) ضع اشارة موجبة اذا كان النزول من اليسار الى اليمين واشارة سالبة اذا كان النزول من اليمين الى اليسار، ثم كون المجاميع . هذه الطريقة موضحة في المثال التالي .

مثال « ٤ » :

أوجد $|A|$ اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

الحل :

باتباع الخطوات (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & 3 & 4 & & \\ & & 1 & -2 & 2 & & \\ & & 3 & 4 & -1 & & \\ -(-24) & & 2 & 3 & 4 & & 4 \\ -16 & & 1 & -2 & 2 & & 16 \\ -(-3) & & & & & & 18 \end{array}$$

لذلك

$$|A| = 4 + 16 + 18 - (-24) - 16 - (-3)$$
$$= 49.$$

مثال « ٥ » :

اوجد $|A|$ للمصفوفة A في المثال « ٤ » ، استخدم التعريف المعطى في (8) .

الحل :

$$|A| = (2)A_{11} + (3)A_{12} + (4)A_{13}$$
$$= (2)(-1)^{1+1}M_{11} + (3)(-1)^{1+2}M_{12} + (4)(-1)^{1+3}M_{13}$$
$$= 2M_{11} - 3M_{12} + 4M_{13}$$
$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (2)(2-8) - (3)(-1-6) + (4)(4+6)$$
$$= -12 + 21 + 40$$
$$= 49.$$

بالنظر الى الجهة اليمنى من (8) ، نلاحظ اننا نضرب كل عنصر في الصف الأول في المعاملات المرافقة ثم نجمع حواصل الضرب هذه لنحصل على قيمة المحدد $|A|$ ، فمن المناسب ان نسمي الجهة اليمنى من (8) بأنها مبسط $|A|$ بالصف الأول . من الجدير بالاشارة الى أننا نحصل على نفس النتيجة اذا ما أوجدنا مفكوك $|A|$ بطريقة مماثلة ولكن باستخدام صف آخر او أي عمود . فمثلا

$$(12) \quad |A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \quad \text{(مستخدمين الصف الثالث)}$$

$$(13) \quad |A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \quad \text{(مستخدمين العمود الثاني)}$$

نطلب من القارىء ان يحقق (12) و (13) بالنسبة للمصفوفة A المعطاة في (7) .

من تعريف محدد مصفوفة من رتبة ٣ والذي اعطى في (8) ، نلاحظ اننا في الحقيقة عرفنا محدد مصفوفة من رتبة ٣ بدلالة محدد من رتبة ٢ . وبالمثل يمكن تعريف محدد من

رتبة ٤ بدلالة محدد من رتبة ٣ . وبصورة عامة المحدد من رتبة n والمعطى في (4) يمكن تعريفه بأنه

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots\ldots + a_{1n} A_{1n} \tag{14}$$

حيث A_{ij} ، المعامل المرافق للعنصر a_{ij} هو محدد مع اشارة ومن رتبة (n - 1) . كما هي الحالة في المصفوفات من رتبة ٣ ، يمكن اثبات ان المحدد |A| يمكن ايجاده باستخدام اي صف او عمود .

مثال « ٦ » :

أوجد |A| اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

الحل :

لتسهيل العمل نلاحظ ان هناك ثلاثة أصفار في العمود الثالث ، لذلك فاننا نوجد قيمة المحدد باستخدام العمود الثالث .

$$|A| = 0 . A_{13} + 0 . A_{23} + 2 . A_{33} + 0 . A_{43}$$

$$= 2A_{33}$$

$$= (2)(-1)^{3+3} M_{33}$$

$$= 2M_{33}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \left[1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right]$$

$$= (2)(-14 + 30 + 4)$$

$$= (2)(20)$$

$$= 40.$$

تمارين (٤) :

اوجد قيمة كل من المحددات التالية :

1. $\begin{vmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{a} \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

(٥ ـ ٥) خواص المحددات :

العمليات الحسابية المتضمنة في ايجاد قيمة محدد مصفوفة من رتبة n (اذا كانت n عدداً كبيراً) متعبة جداً . ولكن هذه العمليات يمكن ان تكون أسهل اذا كان كثير من عناصر المصفوفة أصفاراً .

سوف نعطي بعض خواص المحددات التي تساعدنا على تحويل مصفوفة الى مصفوفة أخرى لها نفس المحدد . من الواضح ان الهدف هو الحصول على مصفوفة بأكبر عدد من الأصفار . سوف نذكر هذه الخواص على شكل نظريات وبدون براهين . بالنسبة للمصفوفات من رتبة ٢ أو ٣ سوف نطلب من القارىء ان يحقق معظم هذه الخواص .

نظرية « ١ » :

اذا كانت جميع مكوّنات صف او جميع مكوّنات عمود مصفوفة A أصفاراً فان

$$|A| = 0$$

أمثلة :

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 8 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 0$

نظرية « ٢ » :

اذا كانت المصفوفة B يمكن الحصول عليها من المصفوفة A بتبديل صفيّن (عمودين) فان

$$|B| = -|A|$$

أمثلة :

$$(a)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (b)\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(c)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 12 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 12 & -4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

نظرية « ٣ » :

اذا تساوت العناصر المتناظرة لصفيّ (عمودين) في مصفوفة A فان

$$|A| = 0$$

أمثلة :

$$(a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad (b)\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -7 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

نظرية « ٤ » :

اذا ضربت جميع عناصر احد صفوف (أعمدة) المصفوفة A في مقدار ثابت K يختلف عن الصفر للحصول على المصفوفة B فان

$$|B| = K|A|$$

$$(a)\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1\times 5 & 2\times 5 & 8\times 5 \\ -6 & 9 & 13 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ -6 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -7 & -8 & 6 \\ 15 & 11 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & 2 \\ 15 & 11 & 3 \end{vmatrix}$$

نظرية « ٥ » :

اذا كان كل عنصر في احد صفوف (أعمدة) المصفوفة A عبارة عن مجموع حدّين ، فيمكن كتابة $|A|$ كمجموع محددين . أي اذا كان

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذاً

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

أمثلة :

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

نظرية « ٦ » :

اذا كانت المصفوفة B ناتجة من المصفوفة A باستبدال اي صف (أو عمـود) في A بمجموع ذلك الصف (أو العمود) و K مرة من صف آخر (أو عمود آخر) فان

$$|B| = |A|$$

أمثلة :

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{R_2 + 2R_1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4+4 & 7-6 & -8+8 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

الرمز $R_2 + 2R_1$ يعني أضف ضعف الصف الأول الى الصف الثاني

$$\text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 8 & 7 & 25 \\ 5 & -1 & 15 \end{vmatrix} \underset{=}{C_3 - 3C_1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6-6 \\ 8 & 7 & 25-24 \\ 5 & -1 & 15-15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

الرمز $C_3 - 3C_1$ يعني أضف 3- مرات مكونات العمود الأول الى المكونات المناظرة في العمود الثالث .

مثال « ١ » :

اوجد قيمة المحدد

$$\text{(1)} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 16 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :

يمكن الاستفـادة من العـدد 1 الموجـود في الصف الأول والعمـود الثالـث لجعـل المكونات الأخرى في الصف الأول او العمود الثالث أصفار

$$|A| \underset{R_3 - 3R_1}{\overset{R_2 - 2R_1}{=}} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 16-6 & -8+10 & 2-2 \\ 2-9 & 4+15 & 3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 10 & 2 & 0 \\ -7 & 19 & 0 \end{vmatrix}$$

نوجد قيمة هذا المحدد الأخير باستعمال العمود الثالث فنحصل على

$$|A| = (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -7 & 19 \end{vmatrix} + 0.A_{23} + 0.A_{33} = (1)(190 + 14) = 204$$

كان بامكاننا ايجاد قيمة المحدد بالحصول على أصفار في الصف الأول كما يلي :

$$|a| \underset{c_2 + 5c_3}{\overset{C_1 - 3c_3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 16-6 & -8+10 & 2 \\ 2-9 & 4+15 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & 19 & 3 \end{vmatrix}$$

الآن نوجد قيمة المحدد الأخير باستعمال الصف الأول

$$|A| = 0.A_{11} + 0.A_{12} + (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ -7 & 19 \end{vmatrix} = 204.$$

يمكن اتباع هذا الأسلوب في حل المثال السابق اذا كان هناك 1 أو 1 - في احد مكونات المصفوفة . اما اذا لم يكن هناك 1 او 1 - فيجب استخدام نظرية (٦) للحصول على 1 أو 1 - . نوضح هذا في المثال التالي :

مثال « ٢ » :

أوجد قيمة المحدد

$$(2) \qquad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$(3) \qquad |A| \overset{C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & -7 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الآن المحدد في الجهة اليمنى من (3) يحتوي على 1 كأحد مكوناته في الموضع a_{11} . يمكننا استخدام هذا الـ 1 للحصول على أصفار في العمود الأول

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & -7 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 + 5R_1 \\ = \\ R_3 - 4R_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 22 & 23 \\ 0 & -12 & -21 \end{vmatrix}$$

بإيجاد قيمة المحدد الأخير باستعمال العمود الأول نحصل على

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 22 & 23 \\ -12 & -21 \end{vmatrix}$$

$$= (22)(-21) - (23)(-12)$$

$$= -186$$

مثال « ٣ » :

أوجد قيمة المحدد

$$(4) \qquad |A| = \begin{vmatrix} 21 & 17 & 7 & 10 \\ 24 & 22 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$|A| \underset{R_2 - 3R_3,\ R_3 - 2R_4}{\overset{R_1 - (R_2 + R_4)}{=}} \begin{vmatrix} -8 & -12 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

توجد قيمة المحدد باستعمال العمود الثالث

$$|A| = 1.(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -8 & -12 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -8 & -12 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -4 & -6 & -1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

بما ان الصفين الأول والثالث متطابقان فان قيمة المحدد تساوي صفراً اذا

$$|A| = (-2)(0) = 0$$

مثال « ٤ » :

اثبت ان

$$(5) \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

الحل :

$$|A| \underset{R_2 - R_3}{\overset{R_1 - R_2}{=}} \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

بايجاد قيمة المحدد باستعمال العمود الأول نحصل على

$$|A| = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\left[(b+c)-(a+b)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

نلاحظ خاصية اخرى من خواص المحددات . ستستعمل في الفصل القادم .

افرض ان

$$(6)\qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

محدد مصفوفة من الرتبة ٣ . اذا كانت A_{11} ، A_{12} ، A_{13} المعاملات المرافقة للمكونات a_{11} ، a_{12} ، a_{13} على التوالي في (6) ، فحسب التعريف

$$(7)\qquad |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

من السهل ان نرى ان المقدار

$$(8)\qquad x_1A_{11} + x_2A_{12} + x_3A_{13}$$

يمكن كتابته بشكل محدد كما يلي

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(لماذا؟)

وعليه فان

$$(10)\qquad a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

(حسب نظرية ٣)

وبالمثل

$$(11)\quad a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

تمارين (٥) :

في المسائل من 1 الى 8 اذكر أسباب تساوي كل مما يأتي :

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -7 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

2. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 7 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

3. $$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 8 & 7 \\ -2 & 15 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & -5 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ -5 & 15 & -2 \end{vmatrix}$$

4. $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

7. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & c \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$$

8. $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -9 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

في المسائل من 9 الى 16 اوجد قيم المحددات التالية :

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -6 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

10. $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

11. $$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 4 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

12. $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

13. $$\begin{vmatrix} 113 & 1 & 16 \\ 175 & 7 & 24 \\ 150 & 3 & 21 \end{vmatrix}$$

14. $$\begin{vmatrix} 46 & 63 & 96 \\ 18 & 19 & 20 \\ 74 & 107 & 172 \end{vmatrix}$$

15. $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 9 & 8 \\ 4 & 11 & 12 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

16. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ -9 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -12 \end{vmatrix}$$

في المسائل من 17 الى 20 أوجد قيمة x .

17. $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & x \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

19. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 20. $\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$

في المسائل من 21 الى 24 اثبت ما يأتي :

21. $\begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix} = 0$ 22. $\begin{vmatrix} 3x+2y & 5x+4y & 7x+6y \\ 2x+y & 4x+3y & 6x+5y \\ x & 3x+2y & 5x+4y \end{vmatrix} = 0$

23. $\begin{vmatrix} a & a+3 & a+6 \\ a+1 & a+4 & a+7 \\ a+2 & a+5 & a+8 \end{vmatrix} = 0$ 24. $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$

25 . اذا كانت c,b,a مختلفة تماماً عن بعضها ، وأيضاً

$$\begin{vmatrix} a^3-1 & a^2 & a \\ b^3-1 & b^2 & b \\ c^3-1 & c^2 & c' \end{vmatrix} = 0,$$

اثبت أن

$abc = 1.$

26 . اثبت أن

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

27 . بالتعبير عما يأتي كمجموع ثمان محددات اثبت أن

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

28 . اثبت أن

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc .$$

29 . اثبت أن معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P(x_1 , y_1)$ ، $Q(x_2 , y_2)$ هي

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

30 . استخدم المسألة رقم29 لايجاد معادلة الخط المستقيم المار بالنقاط

(a) $P(3,4), Q(-2,7)$

(b) $P(-1-5), Q(3,-8)$

31 . أوجد الشروط الواجب توافرها في الثلاث نقاط

$P(x_1 , y_1) , Q(x_2 , y_2) , R(x_3 , y_3)$

حتى تقع على خط مستقيم

32 . استخدم نتيجة المسألة رقم31 لاثبات أن النقاط

$P(3,5) , Q(1,1) , R(-2,-5)$

تقع على استقامة واحدة

(٥ ـ ٦) قاعدة كريمر Cramer's Rule :

سنقوم في هذا الفصل بحل نظام خطي مكوّن من ٣ من المعادلات الخطية في z,y,x من المتغيرات . في الشرح التالي سوف نستخدم محددات من الرتبة ٣ ولكن يمكن اتباع نفس الطريقة عندما يكون لدينا n من المعادلات في n من المجاهيل . يمكن كتابة أي نظام خطي من ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات كما يلي :

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$$

تستعمل معاملات المتغيرات لتكوين المحدد

$$(2) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يسمى D محدد النظام الخطى . حل النظام الخطي (١) باستخدام المحددات معطى في النظرية التالية التي تعرف بقاعدة كريمر .

نظرية «٧» :

اذا كان المحدد D لمعاملات النظام الخطي المكوّن من n من المعادلات بـ n من المتغيرات يختلف عن الصفر ، فللنظام الخطي حل واحد فقط يمكن التعبير فيه عن قيمة كل مجهول ككسر مقامه هو المحدد D وبسطه محدد نحصل عليه من المحدد D باستبدال العمود المكوّن من معاملات ذلك المجهول بالاعداد

$$k_1 , k_2 , k_3 , \ldots . k_n$$

وقبل ان نعطي برهاناً لهذه النظرية نقدّم الأمثلة التالية :

مثال «١» :

حل النظام الخطي

$$(3) \quad \begin{cases} 3x - 3y = 4 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

باستخدام قاعدة كريمر .

الحل :

عندنا بواسطة قاعدة كريمر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{16-(-6)}{12-(-3)} = \frac{22}{15}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6-4}{15} = \frac{2}{15}$$

نطلب من القارىء تحقيق صحة هذا الجواب .

مثال «٢» :

حل النظام الخطي

$$(4) \begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 4x - 20 = -5y \end{cases}$$

باستحدام قاعدة كريمر

الحل :

نعيد كتابة المعادلات أولاً بالشكل المعطى في(1) أو ما يسمى بالصيغة القياسية

$$(5) \begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4x + 5y = 20. \end{cases}$$

حسب قاعدة كريمر عندنا

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-1} = 20$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{12}{-1} = -12.$$

مثال «٣» :

حل النظام الخطي

$$(6) \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2z + 2 = 0 \\ x + y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$$

باستخدام قاعدة كريمر

الحل :

نعيد أولاً كتابة المعادلات بالصيغة القياسية

$$(7) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - 2z = -2 \\ x + y - 3z = -6. \end{cases}$$

حسب قاعدة كريمر عندنا

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{8}{4} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}}{D} = \frac{12}{4} = 3.$$

إذاً

$$x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 3$$

هو حل النظام الخطي .

برهان نظرية « ٧ » في حاله $n = 3$:

افرض ان x و y و z هي المجاهيل في النظام الخطي (١) ، ولنفرض اننا نرغب في ايجاد قيمة X . نحسب أولاً المعاملات A_{11} و A_{21} و A_{31} المرافقة للعناصر a_{11} و a_{21} و a_{31} على التوالي ، في(2) . نضرب المعادلة الأولى في النظام الخطي(1) في A_{11} والثانية في A_{21} والثالثة في A_{31} ثم نجمع . نحصل على

$$(8) \quad (a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31})x + (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31})y$$
$$+ (a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31})z = k_1 A_{11} + k_2 A_{21} + k_3 A_{31} .$$

يمكن كتابة المعادلة(8) بصيغة المحددات كما يلي :

$$(9) \qquad D.x + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ولكن في المعادلة(9) معاملات y و z تساوي صفراً (لماذا ؟) . اذا كانت

$$D \neq 0$$

فان

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

يمكن استخدام نفس البرهان في حالة المجاهل الأخرى .

لا بد ان نشير هنا الى أن الطريقة السابقة تبين انه اذا كان للنظام الخطى حل واحد

فيمكن ايجاد ذلك الحل باستخدام قاعدة كريمر . ويمكن تحقيق صحة الحل بتعويض قيم x و y و z في معادلات النظام الخطي المعطى . نلاحظ ايضاً ان قاعدة كريمر لا يمكن استحدامها اذا كانت قيمة المحددD تساوي صفراً أو اذا كان عدد المعادلات لا يساوي عدد المجاهيل .

لنبحث الآن باختصار الحالة التي نتعامل بها مع معادلات متجانسة . (المعادلات المتجانسة هي التي تكون حدودها المطلقة اصفاراً) .

$$(10)\quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases}$$

حسب قاعدةكريمر عندنا

$$x = \frac{0}{D}\ , y = \frac{0}{D}\ , \text{and } z = \frac{0}{D}\ .$$

وعليه فاذا كان

$$D \neq 0$$

فان للنظام الخطي الحل(0,0,0) . هذا يثبت انه اذا كان للنظام الخطي حل غير (0,0,0) فلا بد ان يكون

$$D = 0$$

وبالعكس يمكن اثبات انه اذا كان$D = 0$ فان لنظام المعادلات المتجانسة حلاً آخر اضافة للحل(0,0,0) . هذه الملاحظة تقودنا الى نظرية مهمة أخرى وهي

نظرية «٨» :

أي نظام معادلات متجانسة مكون منm من المعادلات و n من المجاهيل

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

له حل آخر اضافة للحل

$$x_r = 0, r = 1,2, \ldots\ldots, n$$

اذا كان $n > m$.

البرهان :

نضيف الى النظام المعطى $(n - m)$ من المعادلات المتجانسة من نمط

$$0.x_1 + 0.x_2 + \dots\dots\dots + 0.x_n = 0$$

لمحدد المعاملات للنظام الجديد على الأقل صف واحد كله أصفار وعليه فان قيمة المحدد تساوي صفراً .

ونستنتج من ذلك ان للمعادلة حلاً آخر عدا الحل الصفري .

تمارين (٦) :

في التمارين من 1 الى 16 حل النظام الخطي باستخدام قاعدة كريمر

1. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 15 \\ 7x + 4y - 3z = 19 \\ 2x + y + 6z = 46 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y + 2z = 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 14 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13 \\ 7x_1 - 8x_2 + 26x_3 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ x - 11y + 14z = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 4z = 0 \\ 7x - 10y + 12z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + 6y + 11 = 0 \\ 6y - 18z + 1 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 5y + 15 = 0 \\ 6x + 20y - 6z = 11 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - y + z - t = 4 \\ x + 2y + z + t = 2 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 5 \\ 3x + 4y + 2z - t = 8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 5 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{6}{z} = 4 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{z} = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 8 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{9}{z} = 16 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} - \dfrac{5}{z} = 32 \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = \upsilon, \frac{1}{z} = t\,\upsilon . \right)$$

15. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 3y + 2z = 7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - y + z - t = 4 \\ x + 2y + z + t = 2 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 5 \\ x + z - t = 4 \end{cases}$

تمارين للمراجعة

حل نظام المعادلات التالية

(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x - 3y = 30 \\ 7x + 2y = 11 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 6x + 7y + 6 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -1 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 6y + 5z = -4 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x + 3y + 7z - 4 = 0 \\ 3x + 26y - 2z - 9 = 0 \\ 7x + 2y + 10z - 5 = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 4y + 7z - 7 = 0 \end{cases}$

أوجد محددات المصفوفات التالية

(a) $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

3 . اثبت ان

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3 .$$

في المسائل من 4 الى 9 حقق صحة كل مما يأتي :

4. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = 0$

6. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = 0$

8. $\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} a & b \\ c + ak & d + bk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

الباب السادس
الدوال والمتباينات من الدرجة الثانية

يتعرّض هذا الباب لدراسة دوال الدرجة الثانية وتمثيلها البياني بالطرق التي تعلّمها الطالب . كما يتعرّض هذا الباب لدراسة متباينات الدرجة الثانية وتمثيلها البياني . والجدير بالملاحظة أن طرق حساب التفاضل تمدّنا بأساليب اكثر دقة لدراسة ورسم هذه الدوال والمتباينات .

(٦ ـ ١) دوال الدرجة الثانية :

الدالة من الدرجة الثانية عبارة عن دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية . وبعبارة اخرى الدالة من الدرجة الثانية f هي كل دالة من نمط

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

حيث c,b,a ثوابت و $a \neq 0$. ويمكن كذلك كتابة الدالة f بشكل

$$f = \{ (x,y) \ / \ y = ax^2 + bx + c, a \neq o\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

لندرس أولاً الحالة الخاصة عندما

$$a = 1 , b = 0 , c = 0$$

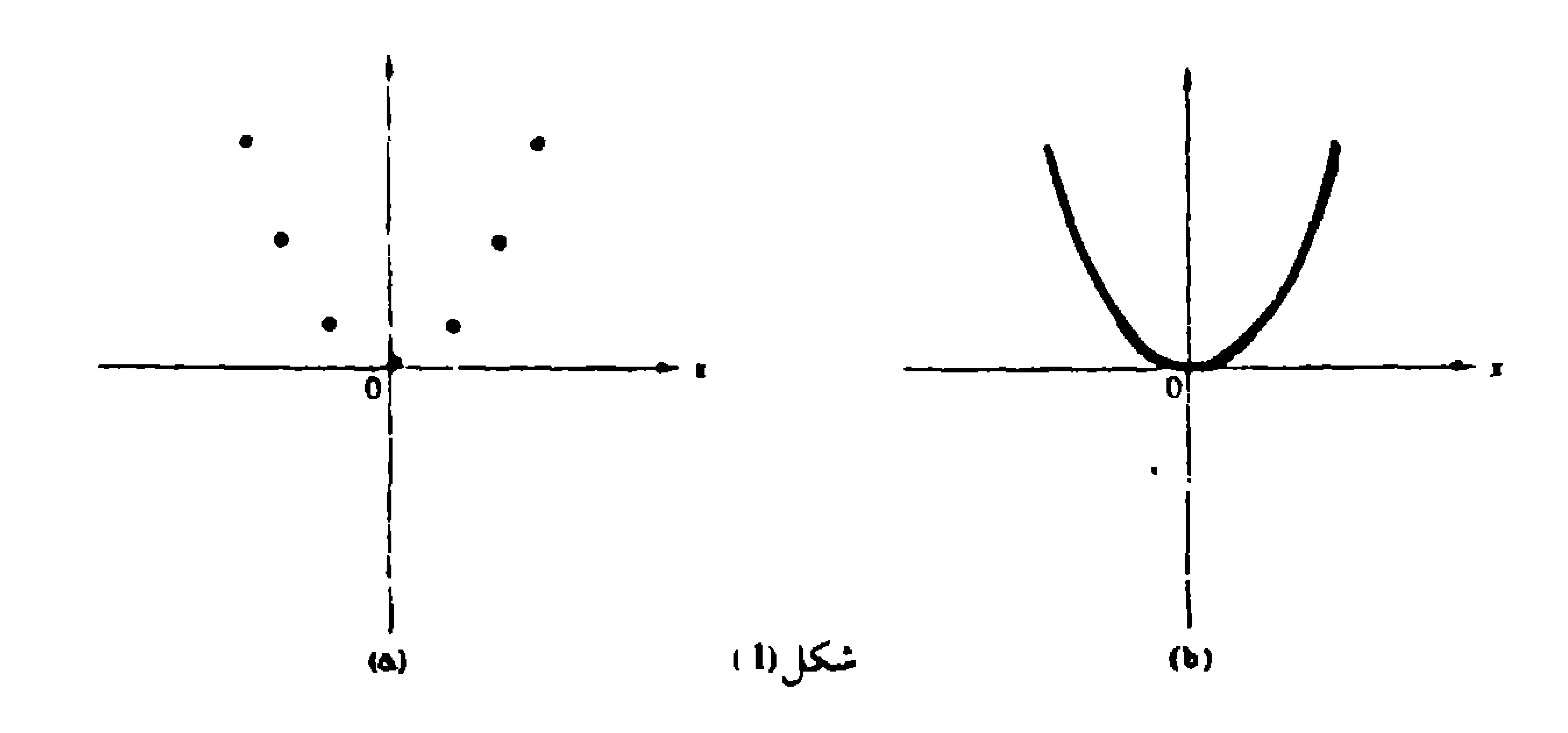
فيكون لدينا

$$f(x) = x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

لرسم الرسم البياني لهذه الدالة نعينّ قيماً لـ x ثم نوجد القيم المناظرة لـ f(x) . ترى هذا بجدول(1) الرسم البياني هو في شكل(1) . اذا وجدنا عدة نقاط اخرى لـ f(x) ووصلناها بمنحنى فنحصل على الرسم البياني للدالة f وهو في شكل(1b) .

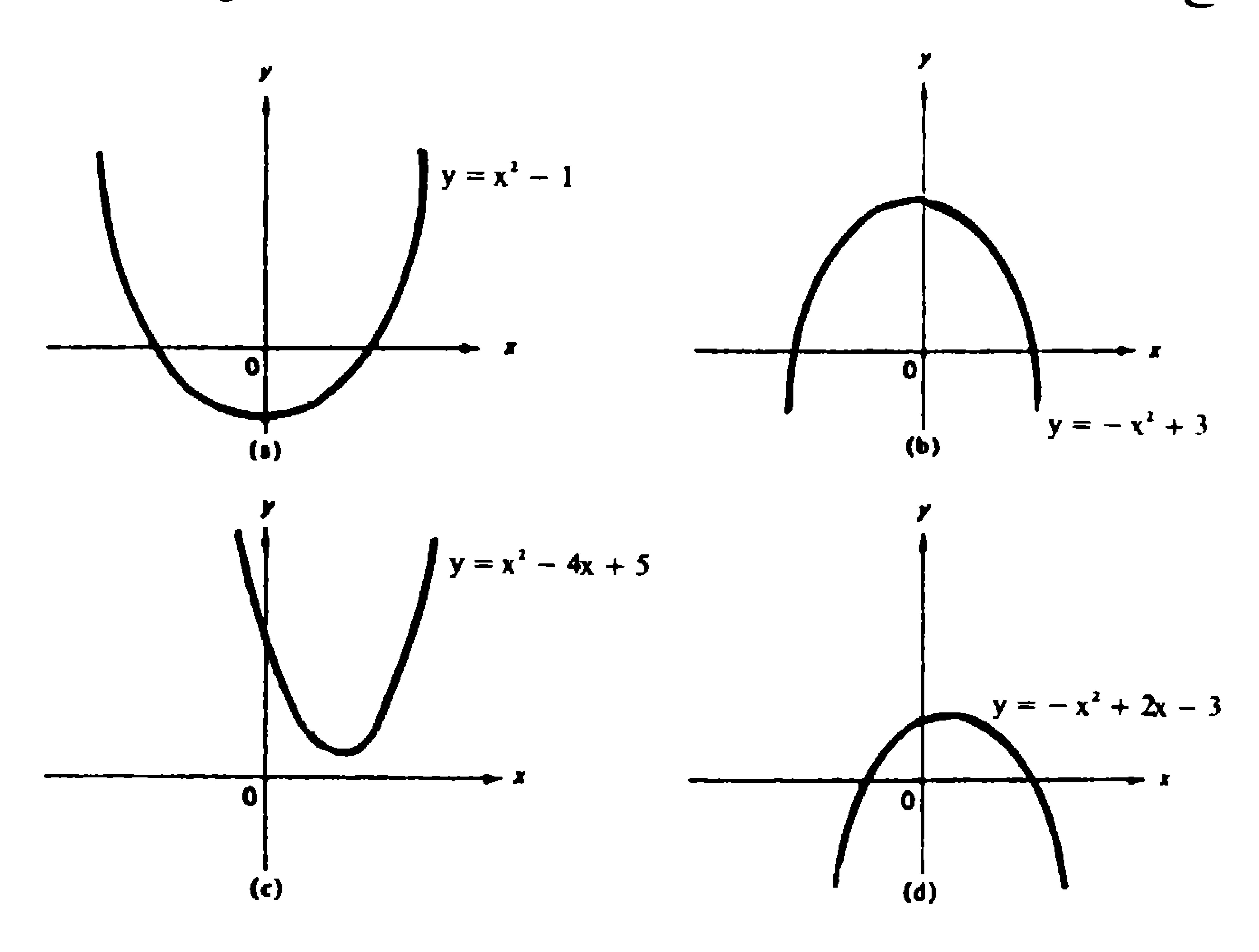
جدول(1)

x	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



شكل(1)

ويعتمد الرسم البياني لدوال الدرجة الثانية على قيم المعاملات a,b,c ويسمى بالقطع المكافىء parabola ويبينّ شكل(1) وشكل(2) بعض هذه القطوع المكافئة .



شكل(2)

نلاحظ من الرسوم البيانية في شكل(2) أن القطع المكافىء مفتوح الى أعلى اذا كان $a > 0$ والقطع المكافىء مفتوح الى أسفل اذا كان $0 > a$ ويتضح ذلك من البرهان التالي :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c, a \neq 0$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

أو

$$(4) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\; f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \; .$$

الحالة (1) : $a > 0$

نستنتج من(4) أن $0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

عندما

$$x = -\frac{b}{2a}$$

لجميع القيم الأخرى لـ x لدينا

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

(لماذا ؟)

إذاً

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a} < f(x)$$

لجميع قيم x التي لا تساوى $\frac{-b}{2a}$

إذاً توجد أصغر قيمة للدالة f عند

$$x = -\frac{b}{2a}$$

أى أن أدنى نقطة في المنحنى هي

$$\left(-\frac{b}{2a},\ c - \frac{b^2}{4a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

الحالة «٢» : $a < 0$

مرة أخرى هنا نستنتج من (4) أن

$x = -\frac{b}{2a}$ عندما $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

ولجميع قيم x التي لا تساوي $\frac{-b}{2a}$ نجد ان

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$$

(لماذا ؟)

إذاً في هذه الحالة

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a} > f(x)$$

لجميع قيم $x \neq \frac{-b}{2a}$

أو بعبارة أخرى للرسم البياني أعلى نقطة وهذه النقطة معطاة في(5) تسمى النقطة المعطاة في(5) برأس القطع المكافىء Vertex . النقاط التي يقطع فيها القطع المكافىء محور x هي النقاط التي يكون فيها

$$y = f(x) = 0$$

يمكن الحصول على هذه النقاط بحل معادلة الدرجة الثانية

$$ax^2 + bx + c = 0$$

لايجاد نقاط تقاطع هذا الرسم البياني مع محور y نضع

$$x = 0$$

في (1)

لرسم أية دالة من الدرجة الثانية من نمط

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

نلاحظ ما يلي :

١ ـ الرسم البياني هو قطع مكافىء .

٢ ـ اذا كان $0 < a$ فان القطع المكافىء مفتوح الى أعلى . اذا كان $0 > a$ فان القطع المكافىء مفتوح الى اسفل .

٣ ـ احداثيات الرأس هي

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

٤ ـ أوجد نقاط التقاطع مع محور x وذلك بحل المعادلة

$$ax^2 + bx + c = 0$$

اذا كان المميز موجباً فان القطع المكافىء يقطع محور x في نقطتين . واذا كان المميز صفراً فالقطع المكافىء يقطع محور x في نقطة واحدة (يمس محور x) . أما اذا كان المميز سالباً فالقطع المكافىء لا يقطع محور x . وفي هذه الحالة اما انه يقع فوق محور x (عندما $0 < a$) واما أنه تحت محور x (عندما $0 > a$) .

٥ ـ نقطة تقاطع القطع المكافىء مع محور y يمكن ايجادها بوضع $x = 0$.

٦ ـ ارسم عدة نقاط اخرى واقعة على القطع المكافىء وذلك باختيار قيم لـ x وايجاد القيم المناظرة لـ y .

٧ ـ يمكن رسم الرسم البياني بايصال النقاط التي حصلنا عليها في الخطوات ٣ ـ ٦ .

مثال «١» :

ارسم الرسم البياني للدالة

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad \text{.............. (6)}$$

الحل :

في المعادلة (6)

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

بما أن $a = 1 > 0$ ، فالقطع المكافىء مفتوح الى أعلى . احداثيات الرأس (أدنى نقطة) هي

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2(1)}, 3 - \frac{(-4)^2}{4(1)}\right) = (2, -1)$$

نقاط التقاطع مع محور x هي

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

أو

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

أو

$$x - 1 = 0, x - 3 = 0$$

أو

$$x = 1, x = 3$$

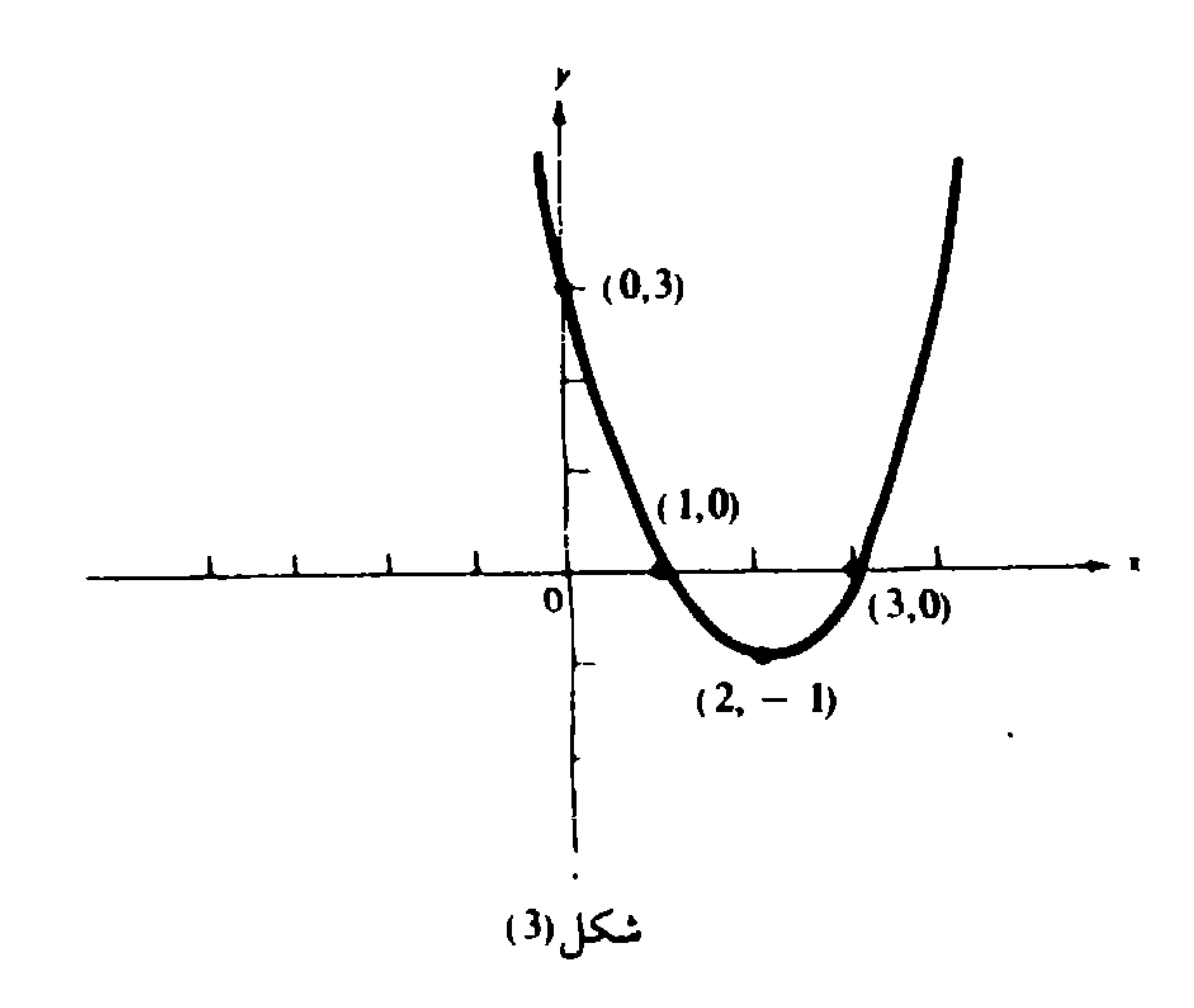
نقطة التقاطع مع محور y هي (0,3)

نجد نقاط اضافية في الجدول التالي (جدول (2))

الرسم البياني للدالة (6) مرسوم في شكل (3)

جدول(2)

x	− 2	− 1	0	1	2
f(x)	15	8	3	0	− 1



شكل(3)

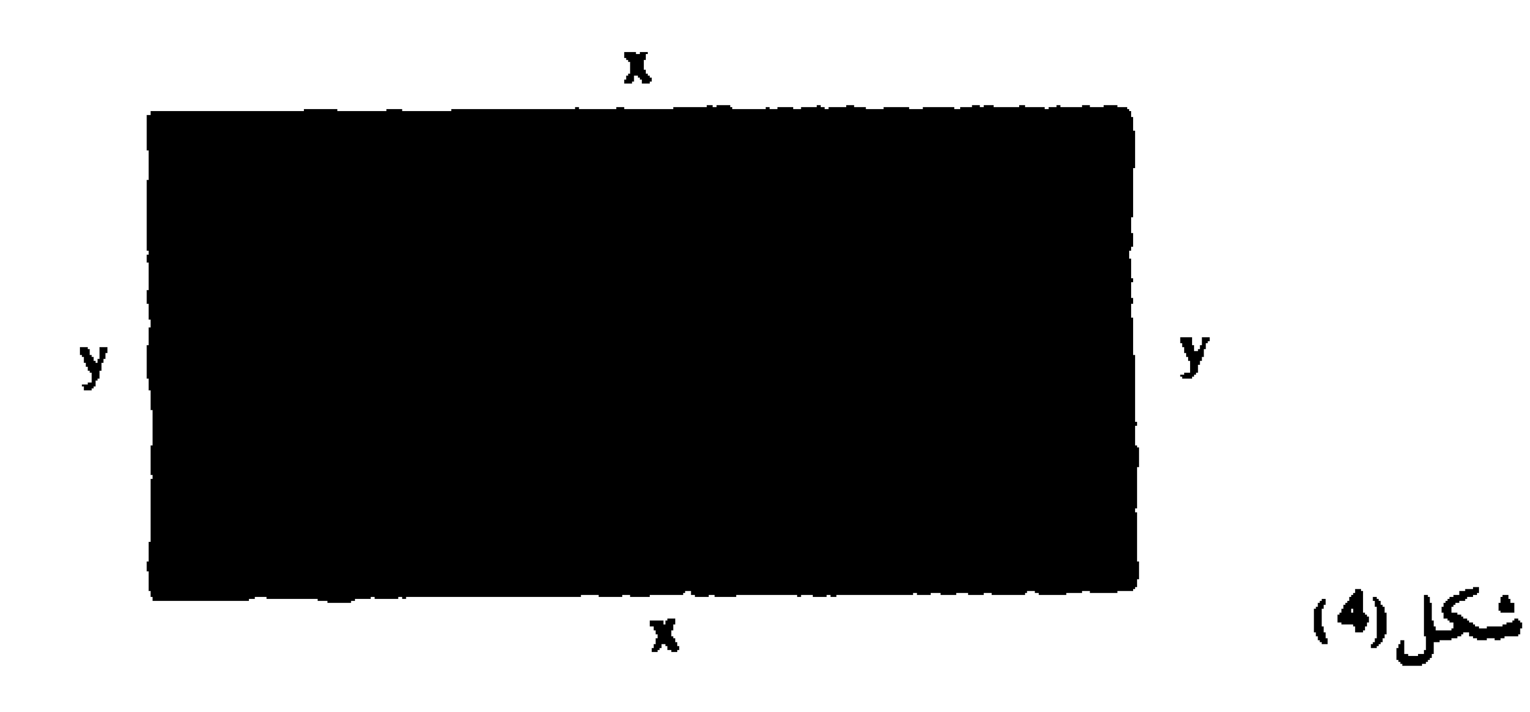
المثال التالي يبينّ كيفية استخدام دوال الدرجة الثانية في حل المسائل التطبيقية في النهايات العظمى (أعلى نقطة على المنحني) والنهايات الصغرى (أدنى نقطة على المنحنى) .

مثال «٢» :

أوجد أبعاد المستطيل ذي أكبر مساحة والذي محيطه يساوي 80 وحدة .

الحل :

افرض ان قاعدة وارتفاع المستطيل هما x و y على التوالي (أنظر الى شكل(4)) .



شكل(4)

بما أن المحيط يساوي 80 فلدينا

$$2x + 2y = 80$$

أو

$$x + y = 40$$

أو

$$y = 40 - x$$

افرض ان A هي مساحة المستطيل ، إذاً

$$A = xy = x(40 - x) = -x^2 + 40x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

المعادلة (7) تمثل دالة من الدرجة الثانية . بما أن معامل x^2 هو 1 - أي أصغر من صفر ، فان لرسم هذه الدالة أعلى نقطة أي أن A لها نهاية عظمى وتحدث النهاية العظمى في

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2(-1)} = 20$$

حيث

$$a = -1, b = 40$$

عندما $x = 20$ لدينا

$$y = 40 - x = 20$$

وعليه فان المستطيل ذي أكبر مساحة هو مربع كل بعد من أبعاده يساوي 20 .

مثال «٣» :

قذيفة قذفت الى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها v ft/sec تصل الى ارتفاع h يعطى حسب القانون

$$h = -16t^2 + vt$$

افرض أن $v = 64$ft/sec ، أوجد اعلى ارتفاع تصل اليه القذيفة . متى تصل القذيفة الى الأرض ؟.

الحل :

بما أن $v = 64$ لدينا

$$h = -16t^2 + 64t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

لاحظ ان

$$a = -16, b = 64, c = 0$$

نرى ان لـ h نهاية عظمى عندما

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{64}{2(-16)} = 2\,\text{sec}.$$

أقصى ارتفاع اذا هو

$$h = -16(2)^2 + 64(2) = -64 + 128 = 64\,\text{ft}$$

القذيفة تعود الى الأرض عندما $h = 0$ مرة ثانية بالتعويض عن $h = 0$ في (8) نحصل على

$$0 = -16t^2 + 64t = -16t(t-4)$$

أو

$$t = 4\,\text{sec}.$$

(٦ - ٢) المتباينات من الدرجة الثانية :

تسمى المتباينات

$$y < ax^2 + bx + c$$

$$y > ax^2 + bx + c$$

$$y \leq ax^2 + bx + c$$

$$y \geq ax^2 + bx + c$$

متباينات من الدرجة الثانية . سبق وتعلمنا في الجزء السابق طريقة رسم الدوال من الدرجة الثانية . أما طريقة رسم المتباينات من الدرجة الثانية فانها مشابهة لرسم المتباينات الخطية . نرسم أولاً الدالة من الدرجة الثانية الناتجة من تبديل اشارة التباين باشارة المساواة . فمن المعلوم ان الدالة من الدرجة الثانية تمثل قطعاً مكافئاً . وفئة حلول المتباينة تكون احدى المنطقتين المفصولتين بالقطع المكافىء . . أما القطع المكافىء فيكون ضمن فئة الحلول اذا كانت المتباينة تشمل المساواة والا فلا يكون القطع المكافىء ضمن فئة الحلول . ولمعرفة أي الجزئين من المستوى هو ضمن فئة الحلول نستحدم نقطة اختبار كما هو الحال في رسم المتباينات الخطية .

المثال التالي يوضح كيفية رسم المتباينة من الدرجة الثانية .

مثال «١» :

ارسم المتباينة

$$y < 2x^2 + 3$$

الحل :

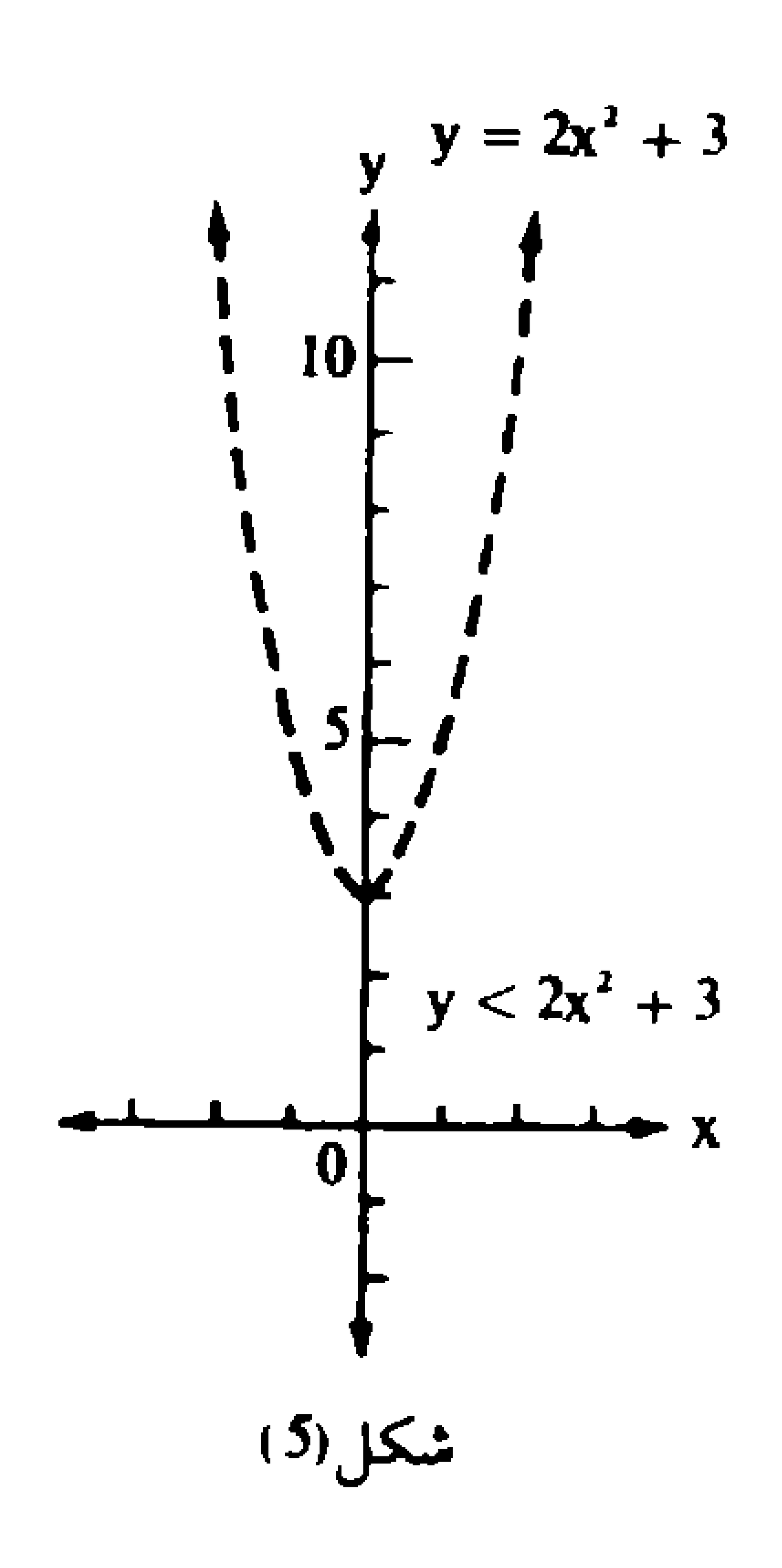
نرسم أولاً القطع المكافىء

$$y = 2x^2 + 3$$

باستحدام نقطة الأصل كنقطة احتبار نجد ان

$$0 < 2(0)^2 + 3$$

وعليه فان احداثيات نقطة الأصل تحقق المتباينة . اذا فئة الحلول تشمل نقطة الأصل أي أنها تشمل جميع نقاط المستوى الاحداثي الواقعة خارج القطع المكافىء (أنظر الى شكل(5)) .



شكل(5)

تمارين (١) :

في المسائل من1 الى10 ارسم دالة الدرجة الثانية ثم استخدم الحل في حل المتباينة

1. $y = x^2 - 4 ; x^2 - 4 \leq 0$

2. $y = x^2 + 5x + 4, x^2 + 5x + 4 < 0$

3. $y = x^2 + x - 2 ; x^2 + x - 2 > 0$

4. $y = 2x^2 + 9x - 5, 2x^2 + 9x - 5 \geq 0$

5. $y = x^2 + 1, x^2 + 1 < 0$

6. $y = -6x^2 + x + 7, -6x^2 + x + 7 \leq 0$

7. $y = -2x^2 - 3x + 2, -2x^2 - 3x + 2 > 0$

8. $y = -5x^2 + 9x - 4, -5x^2 + 9x - 4 \leq 0$

9. $y = (x - 3)^2, x^2 - 6x + 9 \geq 0$

10. $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{4} x + 7, \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{4} x + 7 \leq 0$

11 . أوجد العددين اللذين مجموعهما 36 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

12 . أوجد أبعاد المستطيل الذي مساحته أكبر ما يمكن اذا كان محيطه 40 قدماً .

13 . قطعة من السلك طولها 30 متر استخدمت لعمل ثلاثة أضلاع من مستطيل أوجد أبعاد المستطيل التي تعطى أكبر مساحة ممكنة .

الباب السابع

الدوال الأسيّة والدوال اللوغاريتميّة

يهدف هذا الباب الى دراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية دراسة جبرية ، وينتهي باستخدام اللوغاريتمات في اجراء العمليات الحسابية . وسنعود الى دراسة هذه الدوال دراسة تحليلية عند التعرّض لحساب التفاضل والتكامل .

(٧ ـ ١) الدوال العكسية Inverse Functions :

لمعرفة ما يحدث عند تبديل مكوّني كل زوج من الأزواج المرتبة لدالة ما كلّ مكان الآخر ، نفرض المثال التالي للدالة F المعرّفة كما يلي :

$$(1) \quad F = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$$

اذا استبدلنا مكوّني كل زوج مرتب في (1) كلّ مكان الآخر نحصل على فئة الأزواج المرتبة

$$(2) \quad g = \{(4,-2), (1,-1), (0,0), (1,1), (4,2)\}$$

من الواضح أن g ليست دالة لأن الزوجين (4, −2) و (4,2) لهما نفس المكوّن الأول ومكوّن ثان مختلف . بصورة عامة نسأل السؤال الآتي : افرض ان F دالة ، تحت أية ظروف تكون العلاقة العكسية لدالة معينة دالة أيضاً ؟ .

للاجابة على هذا السؤال نعطي أولاً التعريف الآتي :

تعريف «١» :

تسمى الدالة F أحادية one-to-one اذا واذا فقط عندما x_1 ، x_2 تنتمي الى نطاق F فان

$$(3) \quad F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

أو بعبارة أخرى

$$(4) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$$

أي أن الدالة F من X الى Y دالة أحادية اذا واذا فقط ليس للدالة زوجان مرتبان بنفس المكوّن الثاني . وعليه اذا كانت F دالة أحادية فالعلاقة g التي نحصل عليها من تبديل مكوّنات كل زوج من أزواج F كلّ مكان الآخر (أي العلاقة العكسية للدالة F) دالة أيضاً . وتسمى هذه الدالة

$$g : Y \to X$$

تسمى الدالة g بالدالة العكسية للدالة F ويرمز لها F^{-1} (وتقرأ معكوس الدالة F) . في هذه الحالة ا - ليس أسا للدالة F . من الواضح ان نطاق الدالة $g = F^{-1}$ هو مدى الدالة F ومدى الدالة $g = F^{-1}$ هو نطاق الدالة F . وعليه اذا كان

$$F(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)$$

لجميع y في Y فان

$$F(g(y)) = y$$

ونعطى الآن التعريف التالي .

تعريف «٢» :

اذا كانت F دالة أحادية نطاقها X ومداها Y فان الدالة g التي نطاقها Y ومداها X تسمى الدالة العكسية للدالة F اذا كان لجميع $x \in Y$

$$F(g(x)) = x \tag{5}$$

ولجميع $x \in X$

$$g(F(x)) = x \tag{6}$$

اذا استعملنا الرمز $g = F^{-1}$ فيجب أن يكون عندنا

$$F(F^{-1}(x)) = x\ ,\ \forall x \in Y \tag{5'}$$

و

$$F^{-1}(F(x)) = x\ ,\ \forall x \in X \tag{6'}$$

ويعني الرمز $\forall x$ «لجميع قيم x » .

مثال «١» :

افرض ان F هي الدالة المكوّنة من الفئة

$$\{(1,3)\ ,(3,5)\ ,(4,2)\}$$

أوجد F^{-1} . ارسم الرسم البياني للدالتين F و F^{-1} على نفس المحاور الاحداثية .

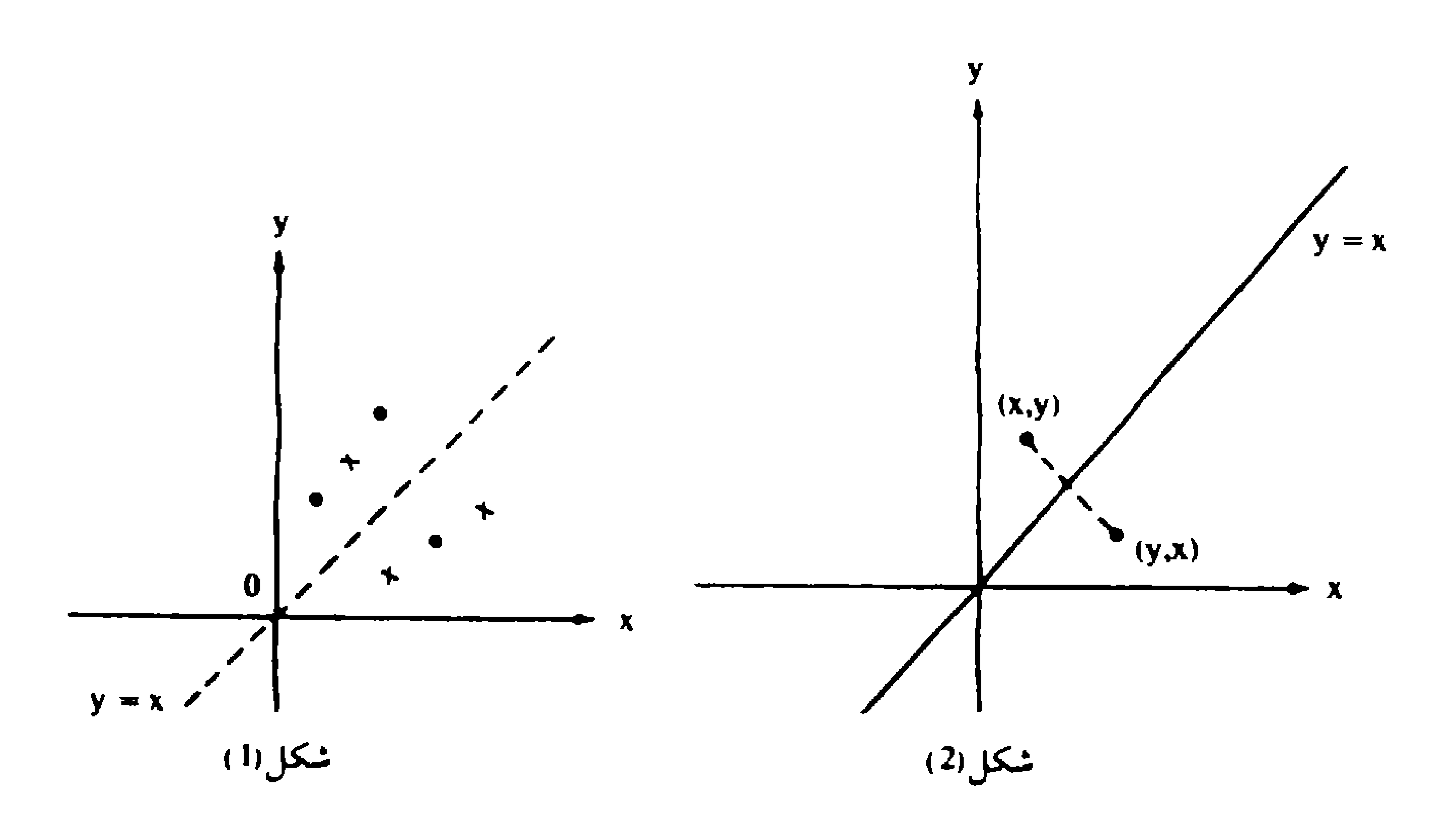
الحل :

نلاحظ انه ليس هناك أي زوجين في F بنفس المكوّن الثاني . اذا الدالة F هي دالة أحادية وعليه F^{-1} دالة أيضاً

$$F^{-1} = \{ (3,1) , (5,3) , (2,4) \}$$

نطلب من القارىء أن يتحقق من صحة (5) و(6)

الرسوم البيانية مبينّة في شكل (1) وشكل (2)



شكل (1)   شكل (2)

لاحظ أن النقطتين (x,y) و(y,x) متناظرتان بالنسبة الى الخط المستقيم $y = x$ (أنظر الى شكل (2)) . اي اننا اذا طوينا الورقة على الخط المستقيم $y = x$ فالنقطتان (x,y) ، (y,x) تنطبقان على بعضهما . إذاً الرسم البياني للدالة F^{-1} والرسم البياني للدالة F متناظران مع المستقيم $y = x$. لاحظ ان هذا حاصل حقاً في شكل (1) .

مثال «٢» :

اذا كانت F دالة معرفة حسب القاعدة

$$F(x) = 2x - 5$$

اثبت ان F^{-1} دالة . ثم أوجد F^{-1} وارسم الرسم البياني لكل من F و F^{-1} على نفس المحاور الاحداثية .

الحل :

لاثبات وجود F^{-1} نثبت أن F دالة أحادية . نطاق الدالة F هو فئة الاعداد الحقيقية R . اذا كان كل من x_1 ، x_2 عدداً حقيقياً . اذا

$$F(x_1) = 2x_1 - 5, F(x_2) = 2x_2 - 5$$

اذا فرضنا أن $F(x_1) = F(x_2)$ ، إذاً

$$2x_1 - 5 = 2x_2 - 5$$

أو

$$2x_1 = 2x_2$$

أو

$$x_1 = x_2$$

إذاً الدالة أحادية . وعليه فان F^{-1} موجودة وهي دالة . ولايجاد F^{-1} ، عندما

$$F = \{ (x,y) \mid y = 2x - 5\}$$

وعليه

$$F^{-1} = \{ (x,y) \mid (y,x) \in F \}$$
$$= \{ (x,y) \mid x = 2y - 5\}$$
$$= \{ (x,y) \mid y = \frac{x+5}{2} \}$$

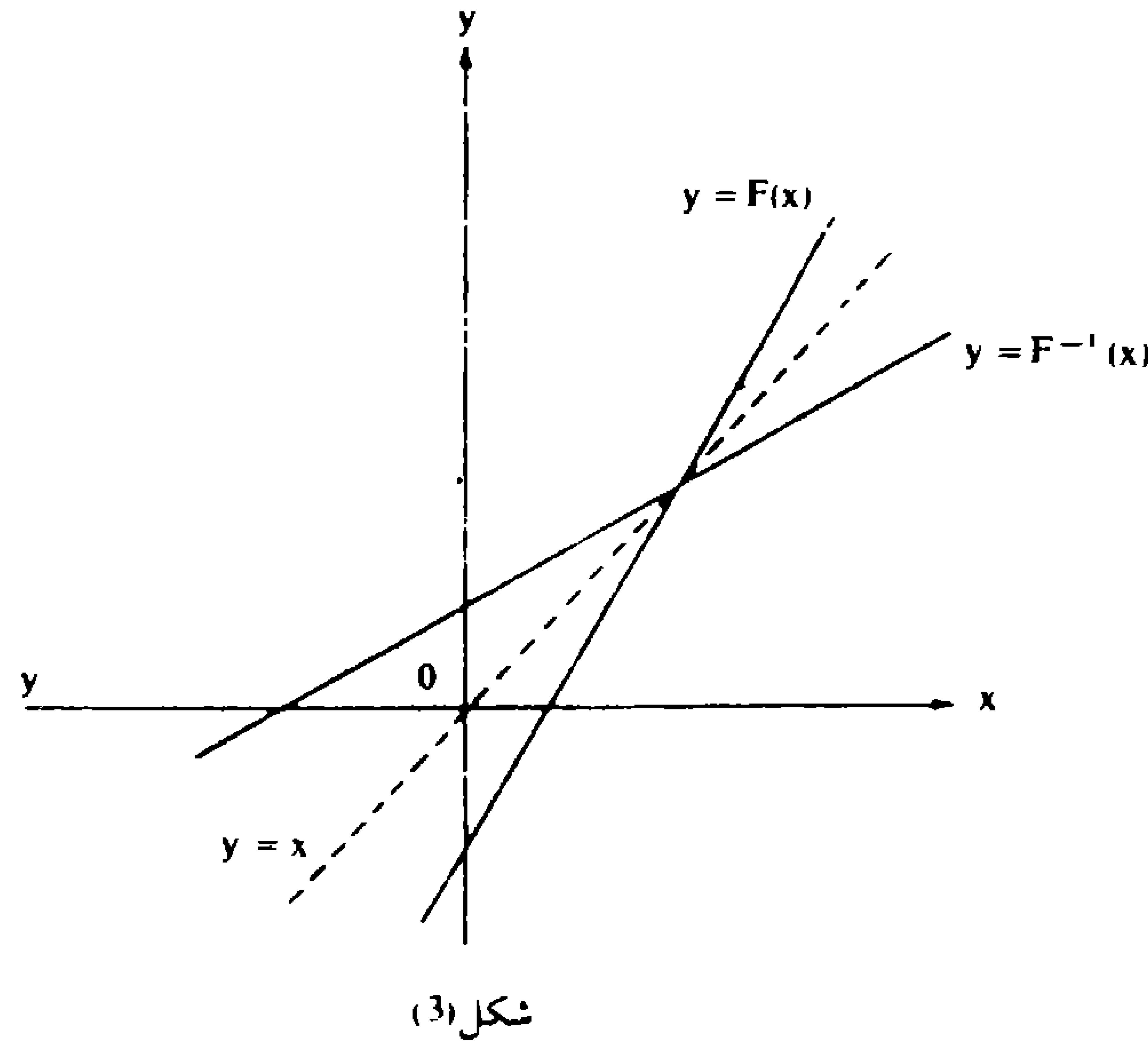
وعليه فان F^{-1} معرفة حسب القاعدة

$$F^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

للتأكد من صحة ان F^{-1} هي معكوس الدالة F نحقق (5) ، (6) . إذاً

$$F(F^{-1}(x)) = F\left(\frac{x+5}{2}\right) = 2\left(\frac{x+5}{2}\right) - 5$$
$$= x + 5 - 5$$
$$= x .$$

$$F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(2x-5) = \frac{2x-5+5}{2}$$
$$= \frac{2x}{2}$$
$$= x.$$



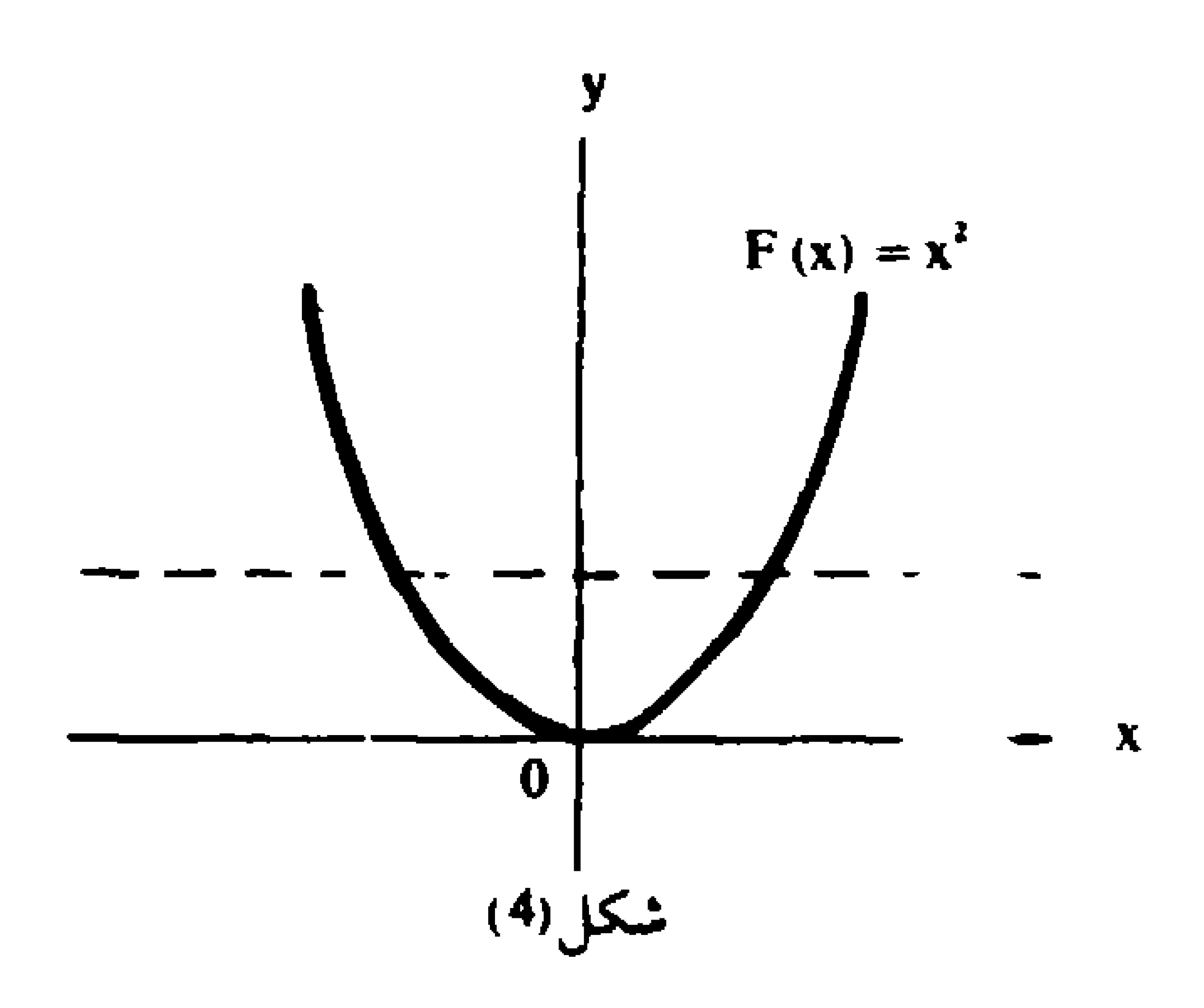
شكل(3)

إذاً(5) و(6) صحيحة . منحنيات F و F^{-1} مرسومة في شكل(3) .

يمكن استخدام الرسم البياني للدالة F لمعرفة ما اذا كانت الدالة أحادية أم لا . نعلم أن أي خط مستقيم عمودي على محور السينات لا يمكن ان يقطع الرسم البياني لدالة في أكثر من نقطة واحدة . نعلم أنه اذا قطع خط أفقي الرسم البياني لدالة F في أكثر من نقطة واحدة فللدالة F أكثر من زوج واحد بنفس المكوّن الثاني . وعليه فان F ليست أحادية و F^{-1} غير موجودة . مثلاً الدالة

$$F(x) = x^2$$

ليست أحادية . وذلك لأن أي مستقيم أفقي فوق محور السينات يقطع الرسم البياني للدالة في نقطتين (أنظر الى شكل(4)) .



شكل(4)

نتكلم الآن عن مفهوم الدوال التزايدية والدوال التناقصية .

تعريف «٣» :

افرض ان f دالة و x_1 ، x_2 أي عددين في نطاق الدالة f فان

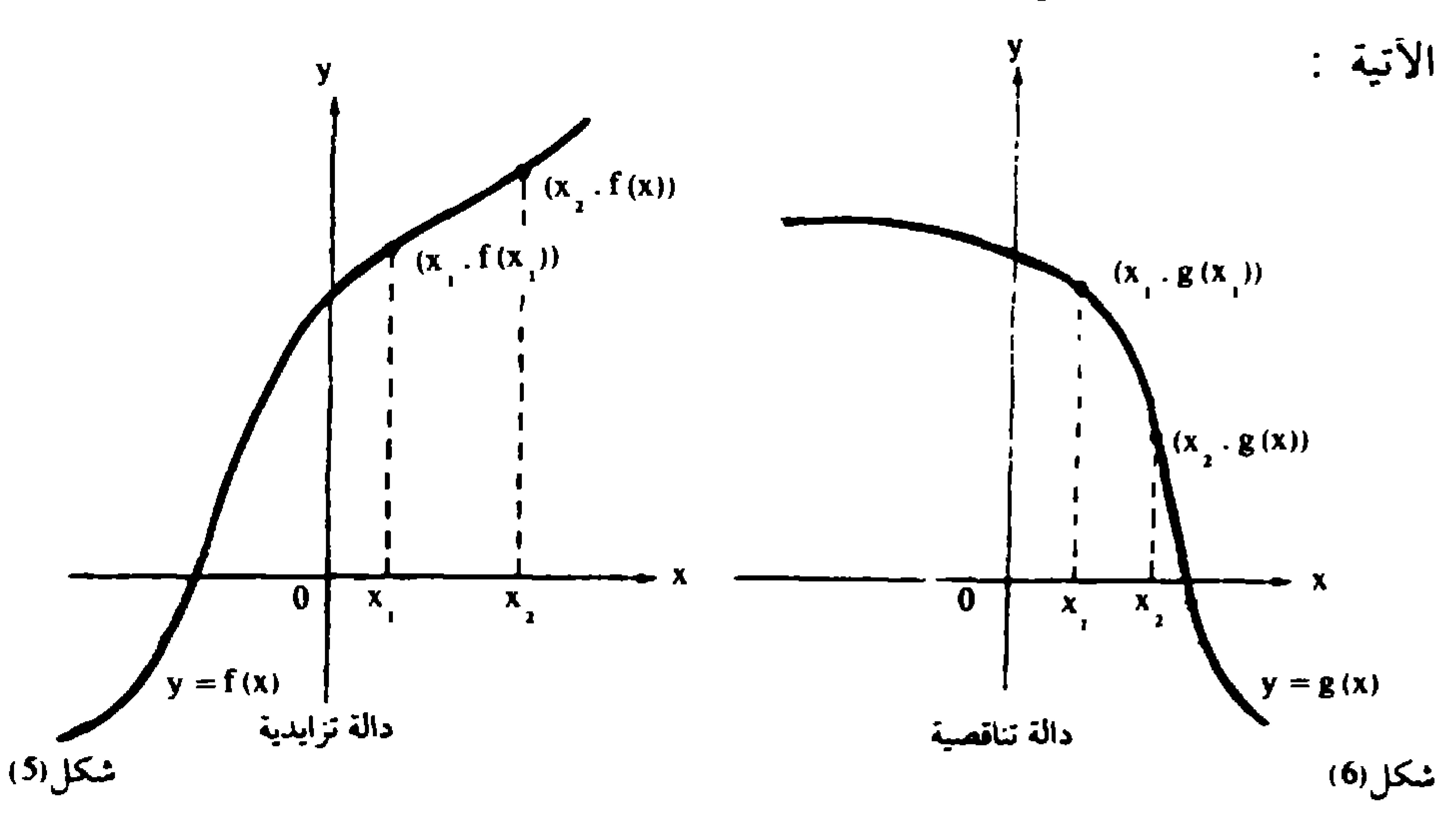
(أ) الدالة f تسمى دالة تزايدية Increasing اذا كان

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(ب) الدالة f تسمى دالة تناقصية Decreasing اذا كان

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

هندسياً منحنى الدالة التزايدية يرتفع بتزايد x . ويرجع ذلك الى أنه عندما تزداد x $(x_1 < x_2)$ تزداد قيمة الاحداثي الرأس كذلك ، أي أن $f(x_1) < f(x_2)$. بالمثل منحنى الدالة التناقصية يهبط بتزايد x (أنظر الى الأشكال(5) ، (6)) . نبرهن الآن النظرية الآتية :



شكل(5)

شكل(6)

نظرية «١» :

(أ) اذا كانت F دالة تزايدية فان F^{-1} موجودة .

(ب) اذا كانت F دالة تناقصية فان F^{-1} موجودة .

البرهان :

نبرهن (أ) فقط حيث ان برهان (ب) مشابه لبرهان (أ) .

افرض ان كلا من x_1 و x_2 عددين في نطاق الدالة F و $x_1 \neq x_2$ ونختار $x_1 < x_2$.
بما أن F دالة تزايدية .

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) < F(x_2)$$

وعليه فإن

$$F(x_2) \neq F(x_1)$$

اذا F دالة أحادية و F^{-1} موجودة .

تمارين (١) :

في المسائل من 1 الى 5 وضحّ بتحقيق صحة المعادلات (5) , (6) أن $g = f^{-1}$ لكل زوج من الدوال فيما يلي :

1. $f = \{ (1, -2), (2,0), (3, -3), (4, 1) \}$,
   $g = \{ (-2, 1), (0,2), (-3,3), (1,4) \}$

2. $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = \dfrac{x-1}{3}$

3. $f(x) = 2 - 3x,\ g(x) = \dfrac{2-x}{3}$

4. $f(x) = x^3,\ g(x) = \sqrt[3]{x}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$

6 . ارسم الرسوم البيانية لكل زوج من الدوال في المسائل من 1 الى 5 على نفس نظام الأحداث الكرتيزية .

7 . بيِّن أن الدالة f المعرّفة حسب $f(x) = x^3$ دالة آحادية

في المسائل من 8 الى 14 أوجد الدالة العكسية f^{-1} لكل دالة f وحقق صحة المعادلات (5) ، (6)

$8.\ f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ $\qquad$ $٩.\ f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x$

$10.\ f(x) = x^2, x \geq 0$ $\qquad$ $11.\ f(x) = x^3 + 1$

$12.\ f(x) = \frac{1}{1-x}, x < 1$ $\qquad$ $13.\ f(x) = 2x^{1/3} + 7$

$14.\ f(x) = (x - 5)^3$

15 . اثبت ان كل دالة تناقصية لها دالة عكسية

16 . اثبت انه اذا كانت $f : X \to Y$ دالة آحادية فان الدالة العكسية لها وهي $f^{-1} : Y \to X$ دالة آحادية أيضاً .

في المسائل من 17 الى 20 اثبت ان للدوال دوالاً عكسية وذلك باثبات انها دوال آحادية

$17.\ f(x) = \frac{1 - 9x}{4}$ $\qquad$ $18.\ f(x) = \frac{3x + 5}{7}$

$19.\ f(x) = (x - 3)^2, x \geq 3$ $\qquad$ $20.\ f(x) = (2x + 3)^3$

(٧ ـ ٢) الدوال الأسية Exponential Functions :

سبق وعرفنا b^x لأي عدد حقيقي موجب b وعدد نسبي x مثلاً

$$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3$$

$$3^0 = 1 .$$

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

$$3^{2/5} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$$

$$3^{-4/3} = \frac{1}{3^{4/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$$

السؤال الطبيعي الآن هو التالي : كيف نُعرِّف b^x عندما تكون x عدداً غير نسبي ؟ مثلاً ما معنى $3^{\sqrt{2}}$ ، 5^{π} . ان تعريف b^x ($0 < b$, x عدد غير نسبي) يحتاج الى بعض الرياضيات العالية . للدلالة على العدد $3^{\sqrt{2}}$ بداهة نستعمل التمثيل العشري غير المنتهي للعدد $\sqrt{2}$ وهو.....1.4142 بالنظر الى الأعداد

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, \ldots\ldots$$

نرى أن كل واحد منها أقرب الى $3^{\sqrt{2}}$ من سابقه . سوف نفترض أن b^x معرفة عندما تكون $0 < b$ و x أي عدد حقيقي ونفترض كذلك ان القوانين الآتية للأسس صحيحة . اذا كان كل من a و b عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من x و y عدداً حقيقياً فان

(1) $a^x . a^y = a^{x+y}$

(2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x . b^x$

(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

نعرف الآن الدالة الأسية .

تعريف «٤» :

اذا كان $b > 0$ و $b \neq 1$ فان الدالة الأسية بأساس b هي الدالة F المعرفة حسب القاعدة الآتية :

$$F(x) = b^x \qquad (6)$$

حيث ان x أي عدد حقيقي .

يمكن إثبات أنه إذا كان $b > 1$ فإن الدالة الأسية (6) هي دالة تزايدية، أي أنه إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $b^{x_1} < b^{x_2}$. بينما إذا كان $0 < b < 1$ فالدالة الأسية (6) دالة تناقصية، أي أنه إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $b^{x_1} < b^{x_2}$. ونستنتج من هذا أنه إذا كان $0<b$ و $b \neq 1$ فإن الدالة الأسية المعرفة حسب القاعدة.

$$F(x) = b^x$$

دالة آحادية وعليه فان لها معكوساً ، أي أن $F^{-1}(x)$ موجودة . نطاق الدالة الأسية هو فئة الأعداد الحقيقية R ومداها هو فئة الأعداد الحقيقية الموجبة .

مثال «١» :

ارسم الرسم البياني للدوال المعرفة كما يأتي :

(أ) $y = 2^x$ (ب) $y = 3^x$ (جـ) $y = (\frac{1}{2})^x$ (د) $y = (\frac{1}{3})^x$

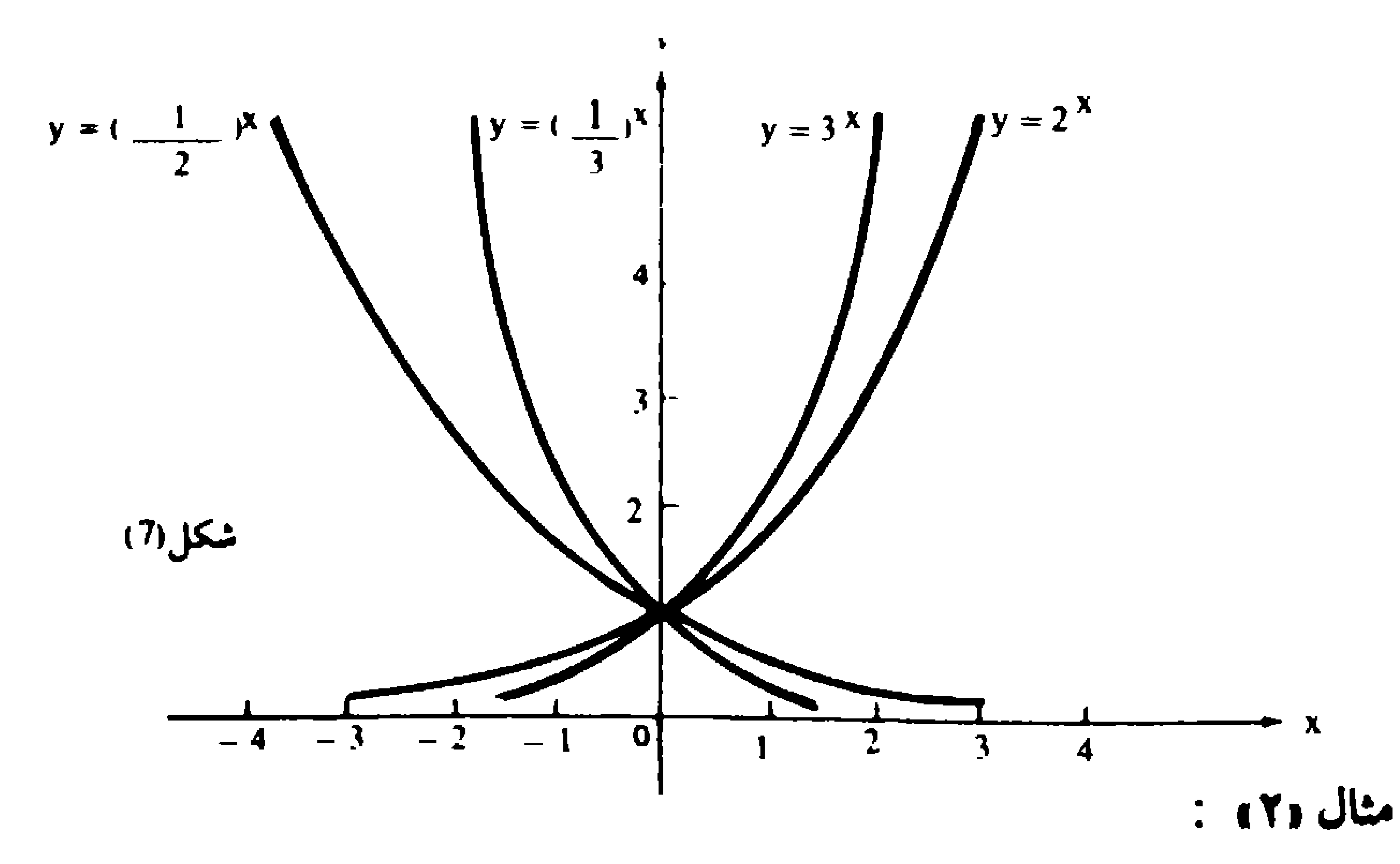
الحل :

ترى في الجدول(1) عدة نقاط في الرسم البياني . الدوال (أ) ، (ب) تزايدية والدوال (جـ) ، (د) تناقصية . الرسوم البيانية مرسومة في شكل(7) . الشكل العام للرسم البياني للدالة $F(x) = b^x$, $1 < b$ مشابه لرسم $F(x) = 2^x$ والرسم البياني للدالة

$1 > a > 0, F(x) = a^x$ مشابه لرسم $F(x) = (\frac{1}{2})^x$

جدول(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$(\frac{1}{3})^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



شكل(7)

مثال «٢» :

أوجد قيمة b بحيث ان الرسم البياني للدالة $y = b^x$ يحتوي على النقطة $(2, 49)$

الحل :

بما ان النقطة $(2,49)$ واقعة على الرسم البياني . لدينا

$$49 = b^2$$

أو

$$7^2 = b^2$$

أو

$$b = 7$$

مثال «٣» :

أوجد جميع الأعداد الحقيقية x التي تحقق المعادلة

$$5^{x(x-3)} = 25 \qquad (7)$$

الحل :

بما ان

$$5^2 = 25$$

$$5^{x(x-3)} = 5^2$$

بما ان الدالة

$$F(x) = 5^x \qquad (8)$$

دالة احادية ، نستنتج من(8) ان

$$x(x-3) = 2$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

مثال «٤» :

حل بالنسبة لـx

$$5^{x-3} + 5^{2-x} = \frac{6}{5} \qquad (9)$$

الحل :

المعادلة(9) يمكن كتابتها على الصورة

$$5^x \cdot 5^{-3} + 5^2 \cdot 5^{-x} = \frac{6}{5} \qquad (10)$$

أو

$$\frac{5^x}{125} + \frac{25}{5^x} = \frac{6}{5} \qquad (11)$$

إجعل $y = 5^x$. إذاً تصبح المعادلة(11) على الصورة

$$\frac{y}{125} + \frac{25}{y} = \frac{6}{5}$$

أو

$$y^2 + 3125 = 150y$$

أو

$$y^2 - 150y + 3125 = 0$$

أو

$$(y-125)(y-25)=0$$

إذاً

$$y=125 ، \quad y=25$$

لذلك

$$5^x=125=5^3 ، \quad 5^x=25=5^2$$

إذاً

$$x=3 ، \quad x=2$$

مثال (٥) :

افرض ان z,y,x,c,b,a ، اعـداد حقيقية اكبر من 1 ، وان

$$(12) \quad a^x=b^y=x^z, b^2=ac$$

إثبت ان

$$\frac{y}{x}+\frac{y}{z}=2$$

الحل : إفرض ان

$$a^x=b^y=c^z=k.$$

إذاً $k>0$ ، $k\neq 1$ (لماذا ؟)

$a^x=k$ تؤدي الى $a=k^{\frac{1}{x}}$

$b^y=k$ تؤدي الى $b=k^{\frac{1}{y}}$

$c^z=k$ تؤدي الى $c=k^{\frac{1}{z}}$

حيث $b^2=ac$ سنحصل على

$$(k^{\frac{1}{y}})^2=k^{\frac{1}{x}}k^{\frac{1}{z}}$$

أو

$$k^{\frac{2}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$$

وحيث

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$$

لذلك

$$\frac{y}{x} + \frac{y}{z} = 2$$

مثال (٦) :

أي من العددين $2^{\frac{1}{8}}, 3^{\frac{1}{5}}$ أكبر ؟

الحل :

اجعل $x = 2^{\frac{1}{8}}$ ، $y = 3^{\frac{1}{5}}$ إذاً

$$x^{40} = 2^{8} \qquad y^{40} = 3^{5}$$

$$= 256 \text{ ،} \qquad = 243$$

وحيث ان $243 < 256$ فإننا نحصل على

$$x^{40} > y^{40}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{40} > 1$$

لذلك $\frac{x}{y} > 1$ (لماذا ؟)

أو $x > y$

لذلك فإن $2^{\frac{1}{5}} > 3^{\frac{1}{8}}$

تمارين (٢) :

في المسائل من 1 الى 10 ارسم شكل الدالة f . هل الدالة تزايدية أم تناقصية ؟

1. $f(x) = 4^{x}$
2. $f(x) = 1^{x}$
3. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$
4. $f(x) = 2^{-x}$
5. $f(x) = -3^{-x}$
6. $f(x) = 2(3^{x})$
7. $f(x) = 3^{4-x}$
8. $f(x) = (0.2)^{x}$
9. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
10. $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

في المسائل من 11 الى 15 بسّط التعبيرات الآتية باستخدام قوانين الأسس .

11. $2^{\sqrt{7}} \cdot 2^{\sqrt{28}}$
12. $\frac{3^{\sqrt{50}}}{3^{\sqrt{18}}}$

13. $(7^{\sqrt{3}})$ 14. $2^{\sqrt{5}} . 4^{\sqrt{20}}$

15. $\dfrac{9^{\sqrt{27}}}{3^{\sqrt{12}}}$

اذا كانت

16. $f(x) = 3^{x} + 3^{-x}, g(x) = 3^{x} - 3^{-x}$

أوجد

(a) $f(x) + g(x)$ (b) $f(x) - g(x)$

(c) $[f(x)]^{2} - [g(x)]^{2}$ (d) $f(x^{2}) + g(x^{2})$

في المسائل من17 الى20 أوجد الدالة الأسية $f(x) = b^{x}$ التي تحتوي على النقاط

17. $(3, 216)$ 18. $(3, \frac{1}{125})$

19. $(-2, 16)$ 20. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

في المسائل من21 الى30 حل المعادلات

$3^{x-2} = 3^{1}$ 22. $4^{x-1} = 1$

24. $2^{x} = 4\,2^{x+1}$

25. $3^{x} = 9^{x-1} . 27^{1-3x}$ 26. $5^{x(x-6)} = (\frac{1}{25})^{4}$

27. $2^{2x} - 12.2^{x} + 32 = 0$ 28. $3^{2x} - 4.3^{x+1} + 27 = 0$

29. $4(2^{x} + 2^{-x}) = 17$ 30. $4^{1+} + 4^{1-x} = 10$

(٧ - ٣) الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions :

نعلم انه اذا كان $b > 0$ و $b \neq 1$ فان الدالة الأسية F المعرفة حسب

$$(1) \quad F(x) = b^x$$

دالة آحادية . نطاق F هو فئة الأعداد الحقيقية R ومداها هو فئة الأعداد الحقيقية الموجبة . بما ان F دالة آحادية فان لها معكوس F^{-1} . نطاق الدالة F^{-1} هو فئة الأعداد الحقيقية الموجبة ومداها هو فئة الأعداد الحقيقية R . يرمز للدالة $F^{-1}(x)$ بالرمز

$$(2) \quad F^{-1}(x) = \log_b x$$

وتقرأ لوغاريتم العدد x للاساس b .

تسمى الدالة F^{-1} بالدالة اللوغاريتمية .

مثلاً

$\log_2 8 = 3$ مكافئة لـ $8 = 2^3$

$\log_3 9 = 2$ مكافئة لـ $9 = 3^2$

$\log_4 1 = 0$ مكافئة لـ $1 = 4^0$

$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ مكافئة لـ $(4)^{-1/2} = \frac{1}{16}$

$(10)^4 = 10,000$ مكافئة لـ $\log_{10} 10,000 = 4$

$(4)^{-2} = \frac{1}{16}$ مكافئة لـ $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

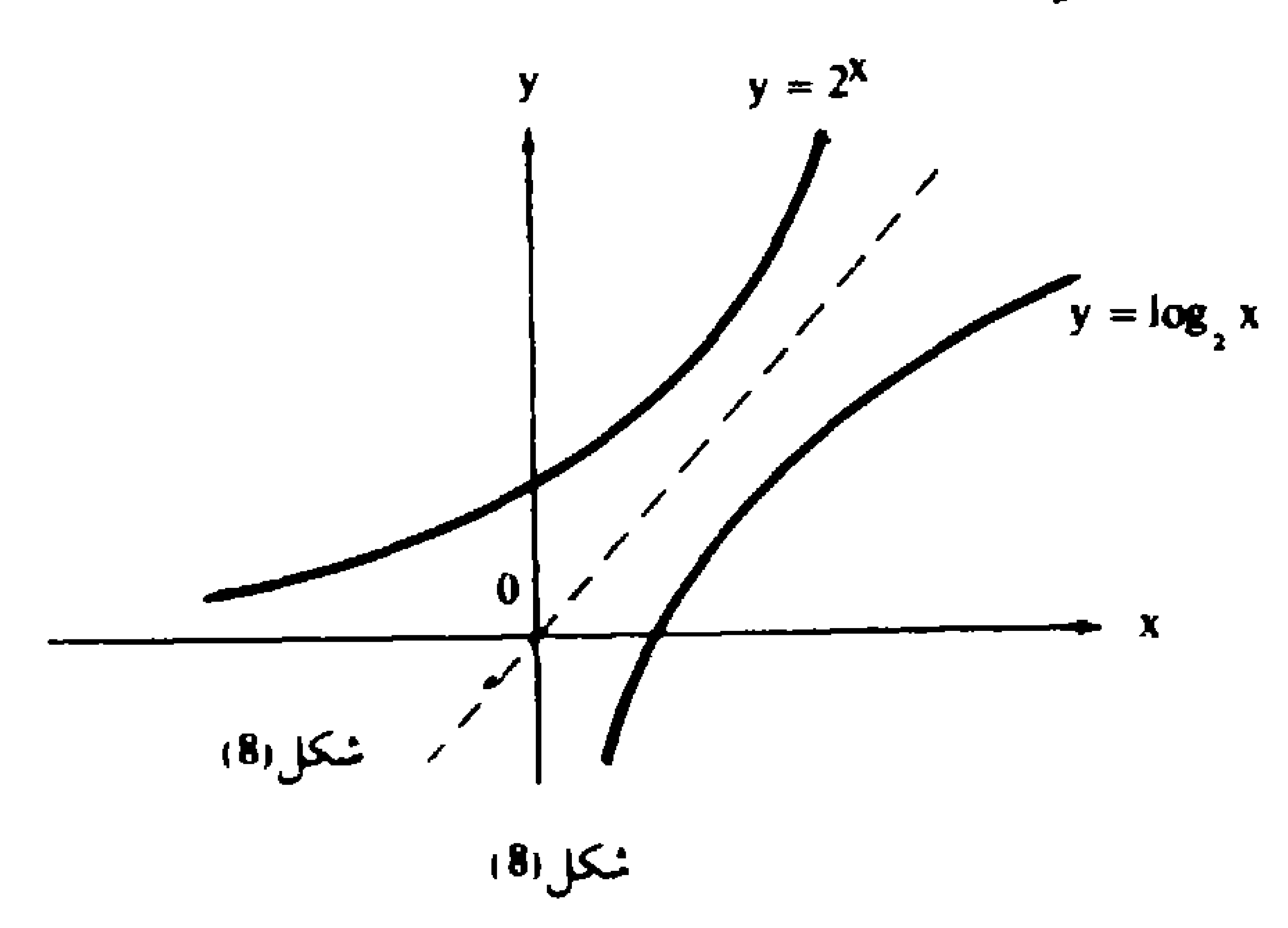
$(100)^{\frac{1}{2}} = 10$ مكافئة لـ $\log_{100} 10 = \frac{}{2}$

بما ان الرسم البياني للدالة F^{-1} هو انعكاس للرسم البياني للدالة F بالنسبة للخط المستقيم $y = x$ ، إذاً يمكن رسم الرسم البياني للدالة

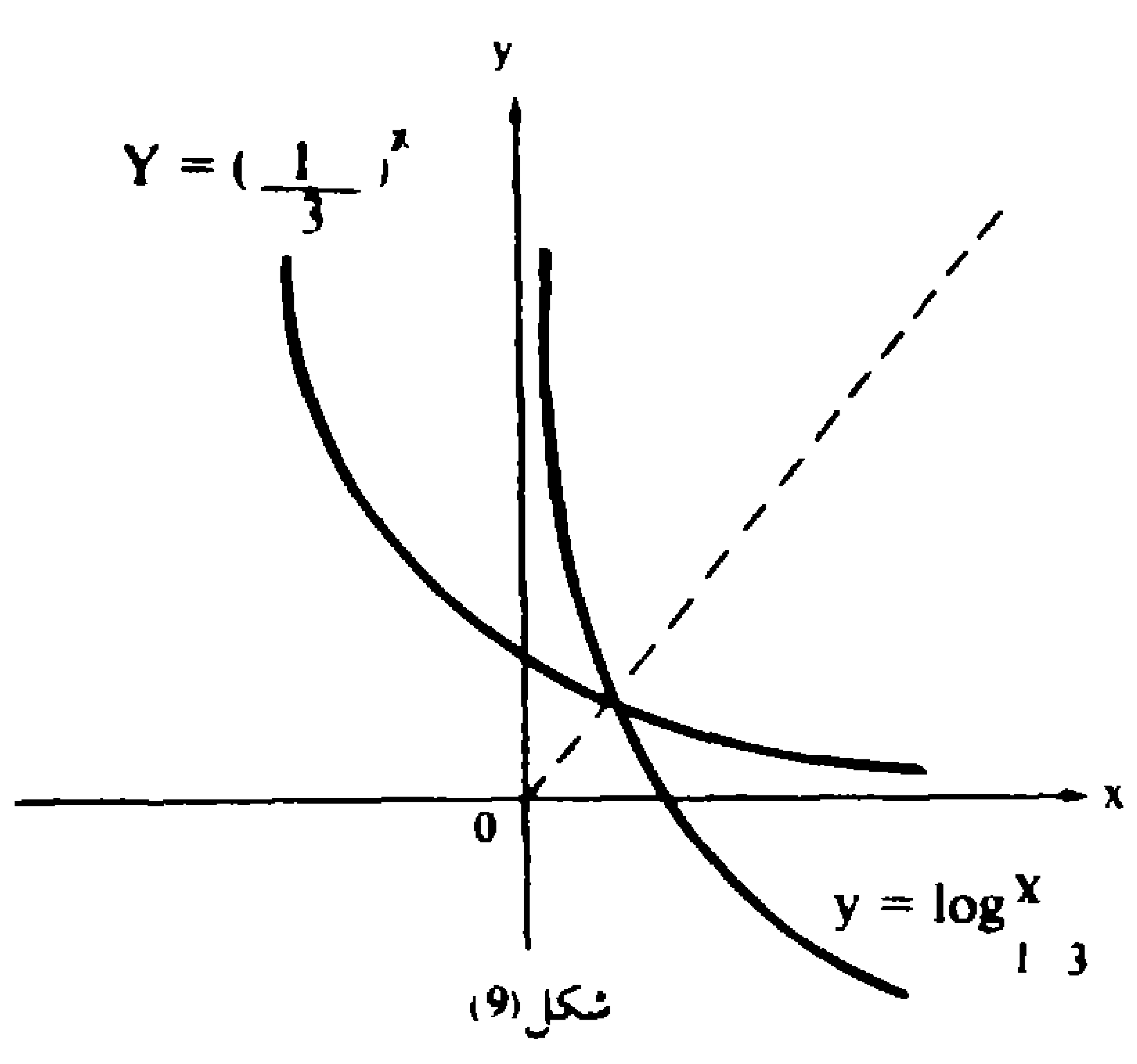
$$(3) \quad y = \log_b^x$$

وذلك برسم الرسم البياني للدالة $y = b^x$ ثم عكس هذا الرسم بالنسبة للخط

$y = x$ استعملت هذه الطريقة في رسم $y = \log_2 x$ و $y = \log_{1/3} x$ المرسومة في شكل(8) وشكل(9) على التوالي .



شكل(8)



شكل(9)

اذا كان $b > 1$ فان الرسم البياني للدالة $y = \log_b x$ هو الشكل العام المبين في شكل (8) . اذا كان $0 < b < 1$ فالرسم البياني للدالة $y = \log_b x$ مشابه للرسم في شكل(9) .

من الرسوم البيانية المذكورة نلاحظ ما يلي :

$0 < b < 1$	$b > 1$
(أ) الدالة $y = \log_b x$ دالة تناقصية	$y = \log_b x$ دالة تزايدية
(ب) $\log_b x$ عدد سالب عندما $x > 1$	$\log_b x$ موجب عندما تكون $x > 1$
وموجب عندما تكون $0 < x < 1$	وسالب عندما تكون $0 < x < 1$

نستنتج من (أ) أن الدالة اللوغاريتمية دالة أحادية . وعليه

$$(4)\qquad (\log_b M = \log_b N) \Leftrightarrow M = N$$

مثال (١) :

أوجد قيمة x في كل مما يأتي :

(a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ (b) $\log_x 3 = 2$

(c) $\log_5 25 = x$ (d) $\log_3 (2x + 1) = 2$

الحل :

نستعمل تعريف اللوغاريتم .

(a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ تكافىء $x = (3)^{\frac{1}{2}}$ أي أن $x = \sqrt{3}$

(b) بما ان $\log_x 3 = 2$ إذاً $3 = x^2$ أو $x = \sqrt{3}$ (لماذا نرفض $x = -\sqrt{3}$ ؟)

(c) $\log_5 25 = x$ إذاً $5^x = 25$ أو $5^x = 5^2$. إذاً $x = 2$

(d) بما أن $\log_3 (2x + 1) = 2$ إذاً

أو $2x + 1 = 3^2$

أو $2x = 8$

أو $x = 4$

بما ان المعادلات $y = \log_b x$ و $x = b^y$ متكافئة فان خواص الدالة اللوغاريتمية يمكن استنتاجها من خواص الدالة الأسية .

نظرية (٢) :

اذا كان كل من N ، M ، b عدداً حقيقياً موجبـاً ، $b \neq 1$ ، وكان K عدداً حقيقياً فان

$$(5)\qquad \log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$(6) \quad \log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$(7) \quad \log_b M^k = k \log_b M$$

$$(8) \quad \log_b 1 = 0$$

$$(9) \quad \log_b b = 1$$

$$(10) \quad b^{\log_b M} = M$$

سوف نبرهن(5) و(7) و(8) و(10) ونترك برهنة(6) و(9) للقارىء .

برهان(5)

افرض ان

$$(11) \quad u = \log_b M , \ v = \log_b N$$

من تعريف اللوغاريتم نحصل على

$$(12) \quad M = b^u , N = b^v$$

إذاً

$$MN = b^u . b^v = b^{u+v}$$

المعادلة $MN = b^{u+v}$ مكافئة للمعادلة

$$(13) \quad \log_b MN = u + v = \log_b M + \log_b N$$

برهان(7)

أفرض أن

$$(14) \quad u = \log_b M$$

إذاً

$$(15) \quad M = b^u$$

برفع الطرفين الى الأس k نحصل على

$$(16) \quad M^k = (b^u)^k = b^{ku}$$

المعادلة(16) مكافئة الى

$$(17) \quad \log_b M^k = ku = k \log_b M$$

برهان(8)

افرض أن

(18) $\log_b 1 = 1$

إذاً

(19) $1 = b^u$

إذاً $u = 0$ (لماذا ؟)

إذاً $\log_b 1 = 0$

برهان(10)

افرض ان

(20) $u = \log_b M$

نحصل من هذا على أن

(21) $M = b^u$

بالتعويض في قيمة u من(20) في(21) نحصل على

(22) $M = b^{\log_b M}$

مثال «٢» :

اذا كان $\log_b 2 = 0.21$ و $\log_b 3 = 0.27$ ، أوجد قيمة كل مما يأتي :

(a) $\log_b 6$ (b) $\log_b (\frac{3}{2})$ (c) $\log_b 72$ (d) $\log_b \sqrt{3}$

الحل :

(a) $\log_b 6 = \log_b (2)(3) = \log_b 2 + \log_b 3 = 0.21 + 0.27 = 0.48$

(b) $\log_b \frac{3}{2} = \log_b 3 - \log_b 2 = 0.27 - 0.21 = 0.06$

(c)
$$\begin{aligned}\log_b 72 = \log_b 2^3 \,.\, 3^2 &= \log_b 2^3 + \log_b 3^2 \\ &= 3 \log_b 2 + 2 (\log_b 3) \\ &= 3 (0.21) + 2 (0.27) \\ &= 0.63 + 0.54 \\ &= 1.17\end{aligned}$$

(d) $\log_b \sqrt{3} = \log_b 3^{1/2} = \frac{1}{2} \log_b 3 = \frac{1}{2} (0.27) = 0.135$

مثال «٣» :

حل كلاً من المعادلات الآتية :

(a) $\log_2 (x-3) + \log_2 (x-4) = 1$

(b) $\log_4 (x-1) - \log_4 10 = \log_4 (2x+6) + \log_4 3$

(c) $\log_6 (x+6) - \log_6 x = \log_6 (x-4)$

الحل :

(a) $\log_2 (x-3) + \log_2 (x-4) = 1$

أو

$\log_2 (x-3)(x-4) = 1$

أو

$\log_2 (x^2 - 7x + 12) = 1,$

التي تكافىء

$x^2 - 7x + 12 = 2^1 = 2$

أو

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0.$

إذاً فان فئة الحلول للمعادلة الأخيرة هي $\{2,5\}$. ولكن $x = 2$ لا تحقق المعادلة الأصلية (لماذا ؟) . لذلك فان $x = 5$ هو الحل الوحيد للمعادلة (a) .

(b) $\log_4 (x-1) - \log_4 10 = \log_4 (2x+6) + \log_4 3$

أو

$\log_4 \frac{x-1}{10} = \log_4 3(2x+6)$

أو

$\frac{x-1}{10} = 3(2x+6) = 6x + 18$

أو

$x - 1 = 60x + 180$

أو

$59x = -181$

أو

$x = -\frac{181}{59}$

ولكن $x = -\frac{181}{59}$ لا تحقق المعادلة الأصلية وعليه فان فئة الحلول للمعادلة

(b) هي الفئة الخالية ϕ .

(c) $\log_6 (x+6) - \log_6 x = \log_6 (x-4)$

أو

$$\log_6 \frac{x+6}{x} = \log_6 (x-4) .$$

لذلك

$$\frac{x+6}{x} = x - 4$$

أو

$$x + 6 = x^2 - 4x$$

أو

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

أو

$$(x-6)(x+1) = 0 .$$

لذلك $x = -1$ أو $x = 6$ لكن $x = -1$ لا تحقق المعادلة الأصلية لذلك فان فئة الحلول للمعادلة (c) هي $\{6\}$.

مثال «٤» :

لو ان $\frac{\log_b z}{5} = \frac{\log_b y}{3} = \frac{\log_b x}{2}$ اثبت ان

(23) $xy = z$

الحل :

اجعل

$$\frac{\log_b x}{2} = \frac{\log_b y}{3} = \frac{\log_b z}{5} = k$$

إذاً

$$\frac{\log_b x}{2} = k$$

أو

$$\log_b x = 2k$$

أو

$$x = b^{2k}$$

وبالمثل فانه من

$\frac{\log_b y}{3} = k$ نحصل على $y = b^{3k}$

ومن

$\frac{\log_b z}{5} = k$ فنحصل على $z = b^{5k}$

لذلك

$xy = b^{2k} b^{3k} = b^{5k} = z$

مثال «٥» :

اذا علمت أن $\log_{10} 4 = 0.6021$ أوجد عدد الأرقام الصحيحة في N لو أن

$$(24) \quad \log_2 [\log_3 (\log_4 N)] = 2$$

الحل :

اجعل $x = \log_3 (\log_4 N)$ ، لذلك فانه من (24) نحصل على

$\log_2 x = 2$ أو $x = 2^2 = 4$

لذلك نحصل على

$$(25) \quad \log_3 (\log_4 N) = 4$$

من المعادلة (25) وباستخدام تعريف اللوغاريتمات نحصل على

$$(26) \quad \log_4 N = 3^4 = 81$$

من المعادلة (26) نحصل على

$$(27) \quad N = 4^{81}$$

بأخذ اللوغاريتمات للأساس 10 لكلا الجانبين في المعادلة (27) نحصل على

$$\log_{10} N = \log_{10} 4^{81} = 81 \log_{10} 4$$
$$= 81(0.6021)$$
$$= 48.7701$$

حيث

$\log_{10} N = 48.7701$

لذلك

$N = 10^{48.7701}$

حيث أن

$$10^{48} < 10^{48.7701} = N < 10^{49}$$

نحن نعتبر أن N بها 49 رقم صحيح .

تمارين (٣) :

في المسائل من 1 الى 10 حوّل كل معادلة الى الصيغة اللوغاريتمية

1. $2^6 = 64$
2. $7^{-2} = \frac{1}{49}$
3. $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$
4. $5^0 = 1$
5. $(16)^{-3/4} = 0.125$
6. $(27)^{-2/3} = \frac{1}{9}$
7. $10^{-5} = 0.00001$
8. $(81)^{-3/4} = \frac{1}{27}$
9. $a^x = y$
10. $N^u = v$

في المسائل من 11 الى 18 حوّل كل معادلة الى الصيغة الأسية

11. $\log_{10} 1000 = 3$
12. $\log_8 16 = \frac{4}{3}$
13. $\log_{1/3} 243 = -5$
14. $\log_{2/3} \frac{4}{9} = 2$
15. $\log_v u = w$
16. $\log_4 1 = 0$
17. $\log_a 3 = 0.49$
18. $\log_2 N = -5$

في المسائل من 19 الى 30 أوجد قيمة كل لوغاريتم

19. $\log_5 5^2$
20. $\log_b b^{-4}$
21. $\log_3 \sqrt{3}$
22. $\log_8 (\frac{1}{8})$
23. $\log_{\frac{1}{4}} 4$
24. $\log_{1000} 0.001$
25. $\log_{10} \sqrt[4]{100}$
26. $\log_8 4$

$27.\ \log_{27} 243$

$28.\ \log_{27} \frac{1}{81}$

$29.\ \log_{3} (\log_{2} 8)$

$30.\ \log_{2} (\log_{5} \sqrt{5})$

في المسائل من 31 الى 42 حل كل معادلة بالنسبة الى x

$31.\ \log_{5} x = -2$

$32.\ \log_{25} x = -\frac{3}{2}$

$33.\ \log_{32} x = \frac{3}{5}$

$34.\ \log_{x} 1 = 0$

$35.\ \log_{1/3} x = 2$

$36.\ \log_{x} 8 = -3$

$37.\ \log_{3} (x-1) = 4$

$38.\ \log_{5} x^2 = -2$

$39.\ \log_{4} (x-2) - \log_{4} (x+2) = 1$

$40.\ \log_{2} (7-x) - \log_{2} (2+x) = 2$

$41.\ \log_{7} 3x + \log_{7} (2x-1) = \log_{7} (16x-10)$

$42.\ (2x+5)^{\log_{10} (2x+5)} = (10)^4$

(ملحوظة : خذ اللوغاريتم لكل من الجانبين للاساس 10) .

في المسائل من 43 الى 50 بيّن نطاق كل دالة ثم ارسم الرسم البياني للدالة .

$43.\ f(x) = \log_{2} (x-1)$

$44.\ f(x) = \log_{2} |x|$

$45.\ f(x) = \log_{3} (-x)$

$46.\ f(x) = \log_{3} (1-x)$

$47.\ f(x) = \log_{1/2} (2x-1)$

$48.\ f(x) = \log_{1/2} (3-x)$

$49.\ f(x) = \log_{1/3} (-x)$

$50.\ f(x) = \log_{1/3} (1-x)$

اذا علمت ان $\log_{n} 2 = a, \log_{n} 3 = b, \text{and } \log_{n} 5 = c$

أوجد قيمة كل مما يأتي بدلالة a,b,c

(a) $\log_{n} 6$ (b) $\log_{n} 9$ (c) $\log_{n} 10$ (d) $\log_{n} 15$,

(e) $\log_n 30$ (f) $\log_n 40$ (g) $\log_n \sqrt{15\sqrt{2}}$ (h) $\log_n \frac{3}{2}$

(i) $\log_n 2.5$ (j) $\log_n \frac{10}{3}$

في المسائل من52 الى55 اكتب التعبيرات الآتية على صورة لوغاريتم عدد واحد .

52. $\log_3 \left(\frac{5}{4}\right) - \log_3 \frac{7}{2}$

53. $\log_5 \frac{21}{4} - \log_5 \frac{7}{2} + \log_5 \frac{8}{9}$

54. $3\log_4 10 - 2\log_4 5$

55. $3\log_6 12 - 4\log_6 9 + \frac{3}{2}\log_6 4$

في المسائل من56 الى63 عبّر عن اللوغاريتم في صورة لوغاريتمات z,y,x .

56. $\log_b xyz$

57. $\log_b \sqrt{xyz}$

58. $\log_b x^2 y^3 z$

59. $\log_b \frac{xy^3}{z^2}$

60. $\log_b x^{3/2} y^{4/5} z^{-1}$

61. $\log_b x\sqrt{yz}$

62. $\log_b \sqrt{x\sqrt{yz}}$

63. $\log_b (x \log_b b^{\sqrt{yz}})$

64 . اثبت ان

$$\log_{10} \frac{a^2}{bc} + \log_{10} \frac{b^2}{ca} + \log_{10} \frac{c^2}{ab} = 0.$$

65 . اذا كان

$$\log_b \frac{x+y}{7} = \frac{1}{2}(\log x + \log y),$$

اثبت ان

$$x^2 + y^2 = 47xy.$$

66 . اذا كان

$$\frac{\log_{10} x}{2} = \frac{\log_{10} y}{3} = \frac{\log_{10} z}{5} .$$

اثبت ان

(a) $xy = z$, (b) $y^2 z^2 = x^8$

67 . اذا كان

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + r^{-y}}$$

اثبت ان

$$y = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)$$

(٧ ـ ٤) اللوغاريتمات الاعتيادية :

يعتبر العددان 10 و e (e عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات . الأساس e يستعمل بصورة خاصة في التفاضل والتكامل والعلوم . واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$. أما الأساس 10 فيستعمل عادة في الحسابات . تسمى اللوغاريتمات للأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلاً من $\log_{10} x$. من خواص اللوغاريتمات الاعتيادية نستنتج ان

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$$

$$\log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

$$\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2\log 10 = -2$$

وبصورة عامة لأي عدد حقيقي c .

$$\log 10^c = c\log 10 = c.$$

اللوغاريتمات الاعتيادية مفيدة جداً في اجراء العمليات الحسابية وذلك لأن أي عدد موجب x يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط بشكل

$$(1)\; x = k \,.\, 10^c \quad 1 \leq k < 10.$$

و c عدد صحيح . وتسمى هذه الطريقة بالطريقة العلمية .

مثلا :

$$423 = (4.23)(10^2),\; 42357 = (4.2357)(10^4)$$

$$0.423 = (4.23)(10^{-1}),\; 0.00423 = (4.23)(10^{-3})$$

نستنتج من المعادلة (1) انه اذا كان x أي عدد موجب فان

$$\log x = \log k \,.\, 10^{c} = \log k + \log 10^{c}$$

أو

$$(2) \quad \log x = \log k + c$$

حيث $1 \leqslant k < 10$ و c عدد صحيح .

نستنتج من المعادلة (2) انه لايجاد لوغاريتم أي عدد موجب يكفي ان نعرف لوغاريتمات الأعداد المحصورة بين 1 و 10 . في المعادلة (2) العدد $\log k$ يسمى بالجزء العشري Mantissa ويسمى العدد c بالعدد البياني Characteristic .

مثال «١» :

أوجد لوغاريتم كل مما يأتي :

(c) $\log(0.0123)$ (b) $\log 2.46$ (a) $\log(23.5)$

الحل :

بما ان $(2.35)\,10^{1} = 23.5$ ، $(2.46)\,10^{0} = 2.46$ ، $(1.23)\,10^{-2} = 0.0123$

فالأعداد البيانية اذا هي 1 ، 0 ، 2 − على التوالي

بما ان $\log x$ دالة تزايدية ، نستنتج انه اذا كان $1 \leqslant k < 10$ فان

$$\log 1 \leqslant \log k < \log 10$$

أو

$$(3) \quad 0 \leqslant \log k < 1$$

نستنتج من هذا ان الجزء العشري للوغاريتم دائماً عدد غير سالب أصغر من الواحد .

فيما يلي جزء من جدول اللوغاريتمات . لايجاد $\log 6.47$ مثلاً اذهب الى الصف 6.4 ثم تحرك جانباً الى العمود 7 . العدد 0.8109 المظلل في الجدول هو قيمة تقريبية لـ $\log 6.47$.

جدول (٢)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.3	0 7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8121	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6 4	0 8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8086	0.8090	0 8102	0.8109	0.8116	0 8122
6.5	0.8129	0 8136	0.8142	0.8149	0 8156	0.8156	0.8162	0 8176	0 8182	0 8189

بالرغم من أن0.8109 هي قيمة تقريبية للوغاريتم العدد6.47 ولكننا مع ذلك نكتب

$$\log 6.47 = 0.8109$$

وسيترك للقارىء ايجاد قيم اللوغاريتمات المطلوبة في هذا المثال باستخدام جداول اللوغاريتمات الموجودة بنهاية الباب

مثال «٢» :

أوجد كلا مما يأتي :

$\log 0.00647$ (c) $\log 64700$ (b) $\log 647$ (a)

الحل :

نكتب أولاً كلا من الأعداد بالصيغة العلمية ثم نستخدم معادلة(2) ، ونجد الجزء العشري من الجداول

(a) $647 = (6.47)\ 10^2 \quad \log 647 = \log(6.47) + \log 10^2$

$$= 0.8109 + 2$$

$$= 2.8109$$

(b) $64.700 = (6.47)\ 10^4, \quad \log 64.700 = \log(6.47) + \log 10^4$

$$= 0.8109 + 4$$

$$= 4.8109$$

(c) $0.00647 = (6.47)\ 10^{-3}, \quad \log(0.00647) = \log 6.47 + \log 10^{-3}$

لذلك

$$(4) \quad \log 0.00647 = 0.8109 + (-3)$$

لا نجمع العددين 0.8109 و(3 −) في المعادلة (4) . وذلك لأننا اذا جمعنا لحصلنا على

$$\log 0.00647 = -2.1891$$
$$= -2 - 0.1891$$

وهذه النتيجة لا تتفق مع معادلة (2) وذلك لأن الجزء العشري في هذه الحالة عدد سالب . وعليه فاذا كان العدد البياني للوغاريتم سالباً اما ان نتركه في الصيغة القياسية كما هي الحالة في (4) واما ان نعيد كتابة اللوغاريتم بحيث ان الجزء العشري لا يكون سالباً . مثلاً يمكن كتابة (4) بالشكل الآتي :

$$(5) \quad \log 0.00647 = 2.8109 + (-5)$$

أو

$$(6) \quad \log 0.00647 = 24.8109 + (-27)$$

أما الطريقة المعتادة لكتابة (4) فهي

$$(7) \quad \log 0.00647 = 7.8109 + (-10)$$

نعكس الآن عمليات المثال السابق . أي اننا نجد قيمة العدد x عندما يكون logx معلوماً . بعبارة أخرى ، اذا اعطينا العدد y نرغب في ايجاد العدد x بحيث ان $\log x = y$. ويسمى العدد x بالعدد المقابل للوغاريتم (وتكتب Antilog y) .

وعليه فان

$$\text{Antilog}\, y = x$$

اذا واذا فقط $\log x = y$

مثلاً ، يمكن ايجاد Antilog 2.8028 أو حل $\log x = 2.8028$ بعكس عملية ايجاد

اللوغاريتم . نكتب اولاً العدد2.8028 وفقاً للمعادلـة(2) أي بشـكل مجمـوع عددين أحدهما عدد صحيح والآخر كسر عشري محصور بين الصفر والواحد . وعليه

$$2.8028 = 0.8028 + 2$$

نجد من الجداول العددk بحيث

$$\log k = 0.8028$$

في هذه الحالة$k = 6.35$ اذا

$$\log x = \log 6.35 + 2$$

$$= \log 6.35 + \log 10^2$$

$$= \log (6.35)\, 10^2$$

$$= \log 635 .$$

لذلك $x = 635.$

مثال«٣» :

أوجد قيمة تقريبية لـx بحيث ان :

(a) $x = \text{antilog}\,(4.9279)$

(b) $x = \text{antilog}\,(-2.2197)$

الحل : (a) لدينا

$$\log x = 4.9279$$

$$= 0.9279 + 4$$

$$= \log k + \log 10^4 .$$

من جداول اللوغـاريتمات في نهـاية هذا البـاب نجـد ان $\log k = 0.9279$ لذلك حيث $k = 8.47$

$$\log x = \log (8.47) + \log 10^4$$

$$= \log (8.47)\, 10^4 .$$

لذلك

$$x = (8.47)\ 10^4 = 84.700.$$

(b) لدينا $\log x = -2.2197$ ، لاستخدام جدول اللوغاريتمات يجب اولاً كتابة $\log x$ في الصيغة(2) لعمل ذلك ، نضيف ونطرح 3 . وهكذا نحصل على

$$\log x = (3 - 2.2197) - 3$$

$$= (0.7803) + (-3)$$

$$= \log k + \log 10^{-3}.$$

من جدول اللوغاريتامات سنحصل على $k = 6.03$ وهكذا

$$\log x = \log(6.03) + \log 10^{-3}$$

$$= \log(6.03)\ 10^{-3}$$

$$x = (6.03)\ 10^{-3} = 0.00603.$$

ربما يعتقد القارىء عدم امكانية ايجاد لوغاريتم عدد مكون من أربعة ارقام من الجداول . فمثلاً لا يعطى الجدول $\log 6.346$ وكذلك لا يمكن قراءة Antilog 0.8086 من الجداول . في مثل هذه الحالات نجد قيماً تقريبية بطريقة الاستكمال الداخلي الخطي Linear Interpolation وتوضح هذه الطريقة في المثال الآتي .

مثال «٤» :

أوجد $\log 6.346$

الحل :

نجد من الجدول

$$\log 6.340 = 0.8021, \log 6.350 = 0.8028$$

بما ان الدالة اللوغاريتمية دالة تزايدية لدينا

$$\log 6.340 < \log 6.346 < \log 6.350$$

أو

$$0.8021 < \log 6.346 < 0.8028$$

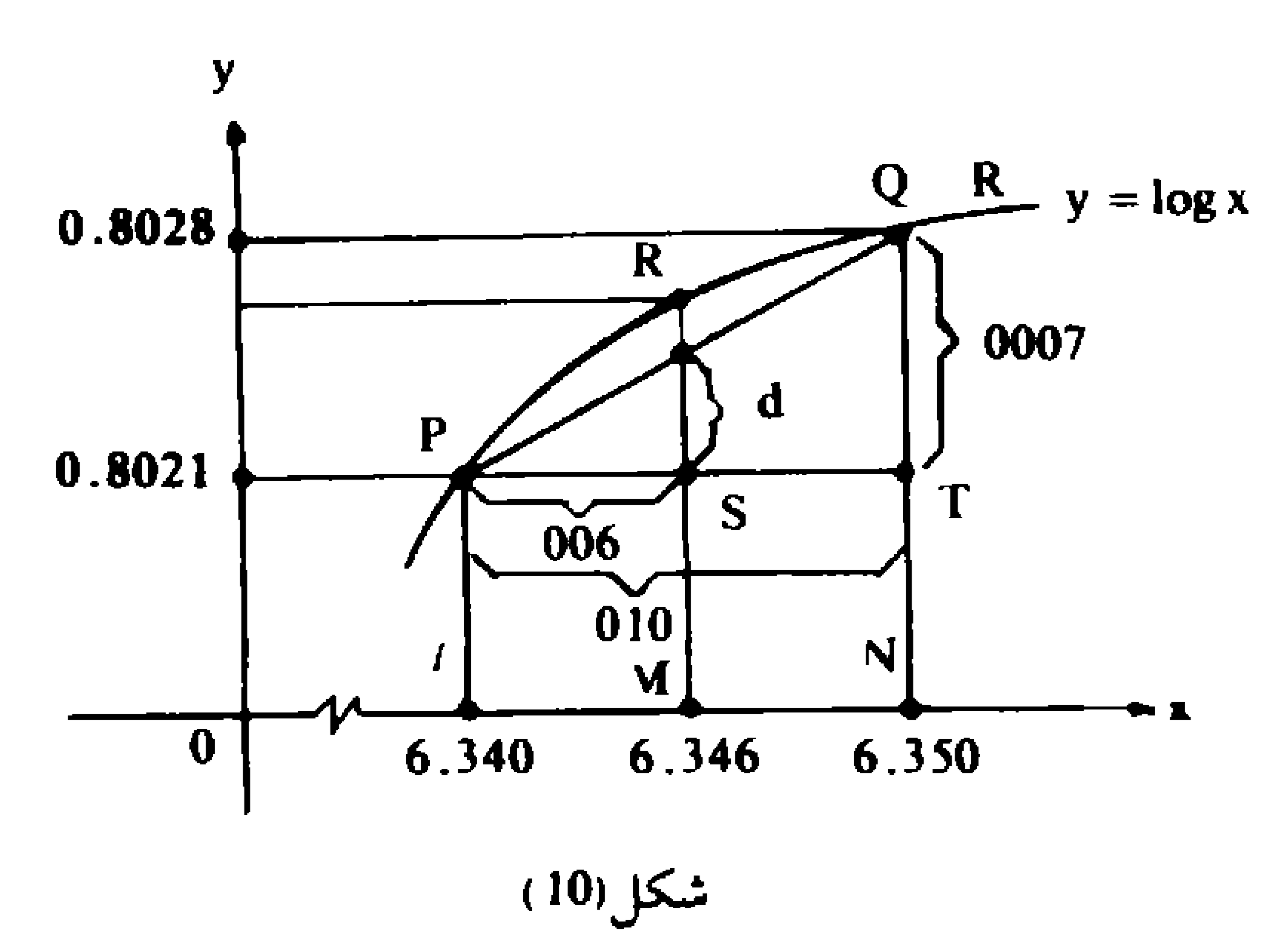
اذا نظرنا الى جزء منحنى الدالة

$$y = \log x$$

بين النقطتين

$$P(6.340, 0.8021) \quad Q(6.350, 0.8028)$$

في شكل(10) فانه يمكن ايجاد قيمة الاحداثي الرأس RM المرتبطة مع قيمة الاحداثي السيني 6.546 .



شكل(10)

$$RM = SM + RS$$
$$= PL + RS$$
$$= \log(6.340) + RS$$

$$RM = 0.8021 + RS. \quad (8)$$

نرغب الآن في ايجاد قيمة تقريبية لـ RS . نأخذ اولاً المستقيم PAQ بدلاً من القوس PRQ لدالة اللوغاريتم (هذا هو سبب تسمية هذا التقريب تقريباً خطياً أو استكمالاً داخلياً خطياً) . نفرض ان RS تساوي تقريباً AS وكليهما يساوي d . حيث ان القيمة التقريبية لـ RS هي d ، فان استخدام d في المعادلة (8) يعطينا المعادلة (9) التالية :

$$RM = \log 6.346 = 0.8021 + d \quad (9)$$

نوجد قيمة d من التناسب بين أضلاع المثلثات المتشابهة APS ، QPT وعليه

$$(10) \quad \frac{d}{0.0007} = \frac{0.006}{0.010}$$

لذلك

$$d = \frac{6}{10}(0.0007) = 0.00042$$

التي نقرّبها الى 0.0004 وهكذا نستخدم

$$d = 0.0004$$

وعليه من المعادلة (9) نحصل على

$$(11) \quad \log 6.346 = 0.8021 + d$$
$$= 0.8021 + 0.0004$$
$$= 0.8025$$

ولحساب قيمة d بدون استخدام الرسم البياني نرتب بياناتنا كما يلي :

$$0.010 \left\{ \begin{array}{l} \log 6.350 = 0.8028 \\ \log 6.346 = \\ \log 6.340 = 0.8021 \end{array} \right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} d \quad \Big\} 0.007$$

ثم نكتب

$$(12) \quad \frac{d}{0.0007} = \frac{0.006}{0.010}$$

والمعادلة (12) هي نفس المعادلة (10)

مثال «٥» :

أوجد Antilog 0.6648

الحل :

اجعل $x = \text{antilog } 0.6648$. اذا $\log x = 0.6648$. الجزء العشري 0.6648 لن يظهر في جدول اللوغاريتمات ومع ذلك نلاحظ من جدول اللوغاريتمات ان :

$$\log 4.62 = 0.6646$$

و

$$\log 4.63 = 0.6656.$$

لذلك تحصل على

$$0.01 \left\{ \begin{array}{l} \log 4.63 = 0.6656 \\ d \left\{ \begin{array}{l} \log x = 0.6648 \\ \log 4.62 = 0.6646 \end{array} \right\} 0.0002 \end{array} \right\} 0.0010$$

الآن

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0002}{0.0010}$$

أو

$$d = 0.002$$

وهكذا

$$\begin{aligned} x &= 4.62 + d \\ &= 4.62 + 0.002 \\ &= 4.622. \end{aligned}$$

تمارين (٤) :

في المسائل من 1 الى 9 أكتب العدد بالطريقة العلمية

1. 298	2. 3,508.7	3. 4.65
4. 0.276	5. 0.0483	6. 0.000175
7. 876,523	8. 0.00008021	9. 0.0000001003

في المسائل من 10 الى 13 أوجد اللوغاريتم

10. (a) log 4.27 (b) log 0.427 (c) log 0.0427

11. (a) log 3.26 (b) log 32.6 (c) log 326

12. (a) log 429 (b) log 4290 (c) log 42,900

13. (a) log 0.673 (b) log 0.00673 (c) log 0.000673

في المسائل من 14 الى 16 أوجد العدد المقابل

14. antilog (0.5527) 15. antilog (3.6946) 16. antilog (3.7143 − 5)

في المسائل من 17 الى 22 أوجد اللوغاريتم

17. log 3.427 18. log 0.2346 19. log 0.0002351

20. log 37.26 21. log 573.8 22. log 6782000

في المسائل من 23 الى 28 أوجد العدد المقابل

23. antilog (0.1860) 24. antilog (2.3110)

25. antilog (7.4040 − 10) 26. antilog (2.5508)

27. antilog (5.7280 − 10) 28. antilog (1.8410 − 3)

(٧ ـ ٥) تطبيقات :

يمكن استخدام اللوغاريتمات الاعتيادية في العمليات الحسابية وحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية . كذلك نشير الى انه من السهل حساب لوغاريتم أي عدد لأي أساس b ، $0 < b$ ، $1 \neq b$ باستخدام اللوغاريتمات الاعتيادية . في الحقيقة نذكر فيما يلي نظرية هامة مع برهانها وهي تتعلق بتغيير الأساس .

نظرية «٣» :

اذا كان كل من a ، b عدداً حقيقياً موجباً يختلف عن الواحد فان

$$(1) \quad \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \ (N > 0).$$

البرهان :

اجعل $\log_b N = x$ لذلك من التعريف نحصل على

$$(2) \quad N = b^x$$

بأخذ لوغاريتم كلا الطرفين في المعادلة (2) للاساس a نحصل على

$$(3) \quad \log_a N = \log_a b^x = x \log_a b$$

من المعادلة (3) نجد ان

$$x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

أو

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

وعلى الاخص لو ان $a = 10$ سنحصل على

$$(4) \quad \log_b N = \frac{\log N}{\log b}$$

مثال «١» :

احسب $\log_5 13$

الحل :

باستخدام النظرية (3)

$$\log_5 13 = \frac{\log 13}{\log 5}$$
$$= \frac{1.1139}{0.6990} = \frac{11.139}{6990}$$

مثال «٢» :

لو ان a ، b اعداد موجبة تختلف عن 1 اثبت ان

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1$$

الحل :

باستخدام النظرية (3)

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} \quad (\log_b b = 1)$$
$$= \frac{1}{\log_b a}$$

أو

$$(\log_a b)(\log_b a) = 1.$$

وسوف نوضح بعض التطبيقات على اللوغاريتمات الاعتيادية في الامثلة الآتية :

مثال «٣» :

باستخدام اللوغاريتمات . احسب

$$x = \frac{(365)(73.4)}{(0.029)(967)}$$

الحل :

لدينا

$$\log x = \log \frac{(365)(73.4)}{(0.029)(967)}$$

$$= \log 365 + \log 73.4 - \log(0.029) - \log 967$$

$$= 2.5623 + 1.8657 - (0.4624 - 2) - 2.9854$$

$$= 2.5623 + 1.8657 - 0.4624 + 2 - 2.9854$$

$$= 6.4280 - 3.4478$$

أو

$$\log x = 2.9802 .$$

لذلك

$$x = \text{antilog}(2.9802)$$

$$= 955.4 .$$

مثال «٤» :

احسب $\sqrt[3]{0.0214}$

الحل :

اجعل $x = \sqrt[3]{0.0214}$ إذاً

$$\log x = \log(0.0214)^{1/3}$$

$$= \frac{1}{3} \log(0.0214)$$

$$= \frac{1}{3} (0.3304 - 2) .$$

وحيث اننا نرغب في الضرب في $\frac{1}{3}$ باننا نختار $1.3304 - 3$ بدلاً من $0.3304 - 2$ بالنسبة للوغاريتم وهكذا .

$$\log x = \frac{1}{3} (1.3304 - 3)$$

$$= 0.4435 - 1,$$

ولذلك

$$x = \text{antilog}\,(0.4435 - 1)$$
$$= 0.2776.$$

مثال «٥» :

حل المعادلة (تاركاً الحل في صورة لوغاريتمات اعتيادية)

$$6^{2x-3} = 11$$

الحل :

حيث أن الأعداد المتساوية لها لوغاريتمات متساوية نحصل على

$$\log 6^{2x-3} = \log 11$$

أو

$$(2x - 3)\log 6 = \log 11$$ (لماذا ؟)

أو

$$2x - 3 = \frac{\log 11}{\log 6}$$

أو

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log 11}{\log 6} + 3\right)$$

تمارين (٥) :

في المسائل من 1 الى 20 احسب ما يأتي باستخدام اللوغاريتمات

1. $(3.42)(52.6)$
2. $(0.467)(0.00523)$
3. $\frac{257}{3.29}$
4. $\frac{0.023}{449}$

5. $(4.7)^2$

6. $(4.23)^3$

7. $\sqrt{37.5}$

8. $\sqrt[3]{0.00249}$

9. $\sqrt[4]{3.86}$

10. $\sqrt[5]{0.000123}$

11. $(0.735)^{4.3}$

12. $(0.0042)^{3.7}$

13. $(72.5)^{51.8}$

14. $(3.12)^3\sqrt{4.18}$

15. $\dfrac{(4.23)^4\sqrt[3]{27.6}}{3.27}$

16. $\sqrt[3]{\dfrac{(4.26)(3.12)^2}{(0.0123)^2}}$

17. $\dfrac{(5237)(428)}{3952}$

18. $\sqrt[4]{0.02359}$

19. $\dfrac{(35.67)^2(512)}{4.102}$

20. $\dfrac{\sqrt{3821}\sqrt[3]{4.823}}{\sqrt[4]{6.291}}$

في المسائل من 21 الى 32 أوجد الحلول بالنسبة لـ x (استخدم e = 2.718)

21. $2^x = 9$

22. $3^x = 5$

23. $4^{x-1} = 7$

24. $2^{3x+4} = 5$

25. $5^{1-x} = 27$

26. $4^{3-4x} = 17$

27. $3^{1-x} = 5^{2-3x}$

28. $\log(\log x) = 3$

29. $\dfrac{4^x - 4^{-x}}{3} = 1$

30. $\dfrac{4^x + 4^{-x}}{3} = 2$

31. $\dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \dfrac{1}{4}$

32. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{4}$

33 . أوجد جملة مبلغ 3000 ريال استثمرت لمدة 8 سنوات بمعدل 5% سنوياً

أ) اذا كانت الفائدة تضاف في نهاية العام .

ب) اذا كانت الفائدة تضاف كل نصف عام .

جـ) اذا كانت الفائدة تضاف كل ربع عام .

اللوغاريتمات الاعتيادية

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

الباب الثامن

المتتابعات والمتسلسلات

ندرس في هذا الباب مواضيع متنوعة مرتبطة بخواص الأعداد الصحيحة الموجبة
ندرس أولاً نوعاً خاصاً من الدوال تسمى بالمتتابعات . ندرس متتابعات نهائية ولا نهائية
ثم ندرس المتسلسلات وبعد ذلك ندرس المتواليات العددية والمتواليات الهندسية .

(٨ - ١) المتتابعات اللانهائية والنهائية :

سبق وأن درس القارىء مفهوم الدالة ودرس دوال كثيرة نطاقها فئات جزئية من فئة الأعداد الحقيقية . ندرس في هذا الفصل دوالاً نطاقها فئات جزئية لفئة الأعداد الصحيحة الموجبة . تسمى مثل هذه الدوال بالمتتابعات . اليك التعريف التالي :

تعريف «١» :

تعرف المتتابعة اللانهائية بأنها دالة نطاقها فئة الأعداد الصحيحة الموجبة N (الأعداد الطبيعية) كلها . أي أن

$$S = \{(n,S(n)) \ / \ n \in N\}$$

وتعرف المتتابعة النهائية بأنها دالة نطاقها الفئة

$$\{ 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, n\}$$

حيث n عدد طبيعي ثابت . تسمى المتتابعات اللانهائية والمتتابعات النهائية بالمتتابعات .

اذا كانت S متتابعة . فان صورة $S(n)$ لأي عدد طبيعي تكتب S_n . تسمى قيمة الدالة S_n بالحد الذي رتبته n من المتتابعة . بما أن نطاق المتتابعة اللانهائية هو فئة الأعداد الطبيعة B ، فإنه من المعتاد تمثيل المتتابعة N بقيم الدالة والرمز $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو الصورة الأبسط $\{S_n\}$ هما المستعملان عادة للدلالة على المتتابعة . كذلك نكتب المتتابعة S بشكل

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

ليس من الضروري أن تكون حدود المتتابعة مختلفة . مدى أية متتابعة لانهائية قد يكون فئة نهائية . وكمثال على ذلك نجد أن مدى المتتابعة المعرفة حسب القاعدة .

$$s_n = (-1)^n$$

هو الفئة $\{-1,1\}$. والتي تتكون من عنصرين فقط .

فيما يلي بعض الأمثلة على المتتابعات .

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

ويمكن كتابتها كما يلي :

$s_n = \frac{1}{n}, n \in N$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

يمكن كتابتها بشكل $\{\frac{n}{n+1}\}$

(3) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

يمكن كتابتها بشكل $\{(-1)^n\}$

(4) $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, \ldots, s_n, \ldots$

s_n معرفة كما يلي :

$$s_n = \begin{cases} n+1 & \text{فردي } n \\ n-1 & \text{زوجي } n \end{cases}$$

(5) $1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \ldots s_n, \ldots$

s_n معرفة كما يلي :

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{فردي } n \\ \frac{1}{2}n & \text{زوجي } n \end{cases}$$

حيث S_n هو العدد الأولي الذي رتبته n

(6) $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, s_n, \ldots$

نلاحظ من الأمثلة السابقة بأننا استطعنا كتابة الحد الذي رتبته n بصورة صريحة في كل من المتتابعات (1) الى (5) بينما لم نستطع اعطاء قاعدة للحد الذي رتبته n بالنسبة

للمتابعة في (6) . حيث لا نستطيع كتابة الحد الذي رتبته n (الحد العام) دائماً بشكل قاعدة رياضية بسيطة .

يمكن كذلك تعريف المتابعة باعطاء الحد الأول ثم اعطاء قاعدة للحصول على الحدود التالية من الحدود السابقة .

مثال «١» :

لتكن المتابعة $\{s_n\}$ معرفة كما يلي :

$$s_1 = 3, s_n = 4s_{n-1} - 2, n > 1$$

أوجد

$$s_4, s_3, s_2$$

الحل :

عندما نضع $n = 2$ في القاعدة $s_n = 4s_{n-1} - 2$ نحصل على

$$s_2 = 4s_1 - 2 = 4(3) - 2 = 10$$

نضع الان $n = 3$ فنحصل على

$$s_3 = 4s_2 - 2 = 4(10) - 2 = 38$$

بنفس الطريقة نحصل على

$$s_4 = 4s_3 - 2 = 4(38) - 2 = 150$$

واضح الأن كيفية حساب الحدود

$$s_5, s_6, \ldots$$

طريقة شائعة أخرى لتحديد متتابعة ما وهي كتابة الحدود الأولى منها وترك القارىء ليجد الحد العام بالتخمين . المثال التالي يبين ان هذه الطريقة لا تحدد المتابعة بدقة .

مثال «٢» :

أوجد الحد العام (الذي رتبته n) لمتابعتين مختلفتين لهما نفس الحدود الأربعة الأولى التالية

$$1, 1/2, \frac{1}{3}, 1/4, \ldots$$

الحل :

التحمين الواضح المباشر هو ان الحد الخامس $\frac{1}{5}$ والسادس $\frac{1}{6}$ والحد الذي رتبته n هو $\frac{1}{n}$. وعليه فان المتتابعة

$$s_n = \frac{1}{n}$$

الآن لاحظ المتتابعة $\{t_n\}$ بحيث

$$t_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \frac{1}{n}$$

بوضع

$$n = 1, 2, 3, 4$$

نجد أن

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

$$t_3 = \frac{1}{3}$$

$$t_4 = \frac{1}{4}$$

لكن

$$t_5 = (5-1)(5-2)(5-3)(5-4) + \frac{1}{5}$$

$$= 24 + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{121}{5}$$

لذا فان $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ متتابعتان مختلفتان لهما نفس الحدود الأربعة الأولى وهي

$$1, 1/2, \frac{1}{3}, 1/4$$

لذا فانه لتحديد أية متتابعة يجب اعطاء القاعدة للحصول على حدودها .

مثال «٣» :

اذا كان الحد العام للمتابعة $\{s_n\}$ هو

$$s_n = 2n^2 + 4n + 1$$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى ثم أوجد الحد العاشر .

الحل :

بالتعويض عن n بقيمها 10,3,2,1 في القاعدة نحصل على

$$s_1 = 2(1)^2 + 4(1) + 1 = 7$$

$$s_2 = 2(2)^2 + 4(2) + 1 = 17$$

$$s_3 = 2(3)^2 + 4(3) + 1 = 31$$

$$s_{10} = 2(10)^2 + 4(10) + 1 = 241 .$$

مثال «٤» :

اذا كان الحد العام للمتتابعة $\{s_n\}$ هو

$$s_n = an^2 + bn$$

وكان الحد الأول يساوي 5 والحد الخامس يساوي 65 . أوجد الحدود الستة الأولى لهذه المتتابعة .

الحل :

ضع بدلاً من n , 1 و 5 في

$$s_n = an^2 + bn$$

نحصل على

$$s_1 = a.1 + b.1 = a + b = 5$$

$$s_5 = a(5)^2 + b(5) = 25a + 5b = 65$$

حل المعادلتين

$$a + b = 5$$
$$25a + 5b = 65$$

هو

$$a = 2, b = 3$$

إذاً المتابعة معطاة حسب القاعدة

$$s_n = 2n^2 + 3n$$

للحصول على الحد الثاني والثالث والرابع والسادس نضع

$$n = 2,3,4,6$$

في

$$s_n = 2n^2 + 3n$$

فنحصل على

$$s_1 = 5$$
$$s_2 = 14$$
$$s_3 = 27$$
$$s_4 = 44$$
$$s_5 = 65$$
$$s_6 = 90.$$

تمارين (١) :

في المسائل من 1 الى 6 أوجد الحد الثاني والسادس والتاسع لكل من المتابعات التالية :

1) $\{ 1 + (-1)^n \}$

2) $\{ \frac{1}{2^n} \}$

3) $\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \}$

4) $\{ 2n - 1 \}$

5) $\{ \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \}$

6) $\{ 3 \}$

7 . مثّل بيانياً كلاً من المتابعات في المسائل من 1 الى 6

في المسائل من 8 الى 10 أوجد صيغة الحد العام لمتابعتين مختلفتين لهما نفس الحدود الثلاثة الأولى :

8) $2,4,8,\ldots$

9) $1, .5, .9, \ldots$

10) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

في المسائل من 11 الى 14 أوجد خمسة الحدود الأولى للمتتابعة

11) $s_1 = \frac{3}{5}, s_n = \frac{1}{2} s_{n-1} \quad , n > 1$

12) $s_1 = 1, s_n = 9 - 2s_{n-1} \quad , n > 1$

13) $s_1 = 2, s_n = 2s_{n-1} \quad n > 1$

14) $s_1 = 2, s_2 = 5, s_n = 6s_{n-2} - 4s_{n-1} \quad , n > 2$

15 . من الحد العام لكل متتابعة في المسألتين 11, 13 أوجد قاعدة للحد العام لا تعتمد على الحدود الأخرى .

16 . في المتتابعة

$F_1, F_2, \ldots$

المعرفة كما يلي

$F_1 = 1, F_2 = 1$

و

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2$

افرض ان

$$s_n = F_n / F_{n+1}$$

احسب الحدود الأولى للمتتابعة

$$\{ s_n \}$$

(٨ - ٢) ترميز الجمع Sigma Notation :

ترتبط مع كل متتابعة متسلسلة Series . اليك التعريف التالي :

تعريف (٢) :

مجموع حدود المتتابعة تسمى متسلسلة . المتسلسلة المرتبطة مع متتابعة لا نهائية تسمى متسلسلة لا نهائية . والمتسلسلة المرتبطة مع أية متتابعة نهائية تسمى متسلسلة نهائية .

مثلاً مع المتتابعة

$$2, 3, 7$$

ترتبط المتسلسلة

$$2 + 3 + 7$$

وترتبط مع المتتابعة

$$a_1, a_2, a_1, \ldots, a_n$$

المتسلسلة

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

يمكن اثبات صحة كل مما يأتي :

(1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

(2) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(3) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

كل من هذه القوانين صحيحة لأي عدد طبيعي n . والنقاط الثلاث تشير الى الحدود المفقودة في المجموع . نقدم الآن ترميزاً مختصراً للمجاميع .

الرمز Σ هو أحد الحروف الكبيرة من الحروف الهجائية اليونانية ويسمى Sigma .

الرمز

$$\sum_{i=1}^{5} x_i$$

(ويقرأ مجموع xi من i يساوي 1 الى i يساوي 5) يعني

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

ليس من الضروري ان يبدأ المجموع من 1 وينتهي بـ 5 . كذلك يمكن استخدام أي حرف بدلاً من i . الأمثلة التالية توضح بعض الامكانيات

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

$$\sum_{i=2}^{4} i(i+3) = 2.5 + 3.6 + 4.7 = 10 + 18 + 28 = 56.$$

$$\sum_{i=1}^{6} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6.$$

$$\sum_{i=4}^{7} x_i = x_4 + x_5 + x_6 + x_7 .$$

$$\sum_{i=1}^{4} 3y_i = 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 .$$

$$\sum_{n=2}^{6} na_n = 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6$$

تمارين (٢):

في المسـائل من 1 إلى 5 أكتب كـل مجموع عـلى صورة مجمـوع حـدود بـدون استخدام رمز المجموع.

1) $\sum_{k=1}^{5} k^2$

2) $\sum_{i=3}^{8} (x_i + y_i)$

3) $\sum_{k=1}^{4} 7x_k$

4) $\sum_{i=1}^{9} 6$ 5) $\sum_{i=2}^{4} (x_i + 1)^2$

في المسائل من 6 إلى 10 أكتب كل تعبير في صيغة رمز المجموع

6) $1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + 50$

7) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots\dots\dots + 16.17$

8) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots\dots\dots + 2^n$

9) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots\dots\dots x_{50}^2$

10) $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots\dots\dots + \frac{x_n}{n}$

(٨ ـ ٣) المتواليات العددية والهندسية

Arithmetic and Geometric Progressions :

تأمل في المتتابعات التالية

(1) $2,5,8,11,\ldots$

$3,6,12,24,\ldots$

في المتتابعة الأولى يمكن الحصول على كل حد(عدا الأول) باضافة ٣ الى الحد السابق له. هذه المتتابعة مثال لمتتابعة عددية Arithmetic Sequence وتسمى كذلك متوالية عددية Arithmetic Progression .

في المتتابعة الثانية يمكن الحصول على كل حد (باستثناء الحد الأول) بضرب الحد السابق له في 2 . هذه المتتابعة مثال لمتتابعة هندسية Geometric Sequence وتسمى كذلك متوالية هندسية Geometric Progression .

تعريف «٣» :

إذا اعطى عددان a و d ، فان المتتالية

(2) $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots$

تسمى متوالية عددية ، كل حد فيها (باستثناء الحد الأول) مكون من اضافة d الى الحد الذي قبله . يسمى العدد d أساس المتوالية .

تعريف «٤» :

اذا أعطى العددان a و r فان المتتابعة

(3) $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$

تسمى متوالية هندسية ، كل حد فيها (باستثناء الحد الأول) يمكن تكوينه بضرب الحد الذي قبله في r . يسمى العدد r بأساس المتوالية .

نلاحظ ان الحد الذي رتبته n في المتوالية العددية قيمته تعطى حسب

(4) $a_n = a_1 + (n-1)d$

حيث a_1 هو الحد الأول و d أساس المتوالية الهندسية ، قيمته تعطى حسب

$$(5) \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

حيث a_1 هو الحد الأول و r أساس المتوالية الهندسية .

مثال «١» :

اذا كان الحد السابع والحد العاشر من متوالية عددية هما 30 ,21 على التوالي ، أوجد الحد الذي رتبته n والحد الخامس عشر .

الحل :

باستخدام (5) نجد ان

$$(6) \quad a_7 = a_1 (7 - 1) d = 30$$

أو

$$(7) \quad a_1 + 6d = 30$$

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) d = 21$$

أو

$$(8) \quad a_1 + 9d = 21.$$

حل (7) و (8) آنياً يعطى

$$a_1 = 48 \quad d = -3$$

اذا الحد الذي رتبته (n) هو

$$a_n = 48 + (n - 1)(-3)$$

أو

$$(9) \quad a_n = 51 - 3n$$

للحصول على الحد الخامس عشر نضع 15 بدلاً من n في (9) . وعليه فان

$$a_{15} = 51 - 3(15) = 51 - 45 = 6$$

ندرس الآن مجموع n من حدود متوالية عددية .

نظرية «١» :

اذا كان S_n مجموع n من حدود متوالية عددية

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

أساسها d فان

$$(10) \quad S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

أو

$$(11) \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

البرهان :

باستخدام (4) نحصل على

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + \left[a_1 + (n-1)d\right]$$

أو

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left[a_1 + (i-1)d\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_1 + \sum (i+1)d$$

$$= na_1 + d\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

$$= na_1 + d\frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

بما ان

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

إذاً

$$2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$$

إذاً

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

مثال «٢» :

كم عدداً بين 1000 و 2000 تقبل القسمة على 7 وكم هو مجموع هذه الأعداد

الحل :

نجد بالتجربة ان أول عدد بين 1000 و 2000 يقبل القسمة على سبعة هو 1001 وثاني عدد هو 1008 وآخر عدد هو 1995 . لنفرض ان n هو عدد حدود المتوالية العددية

$$1001, 1008, \ldots, 1995$$

اذا حسب (4) لدينا

$$1995 = 1001 + (n - 1)\,7$$

نحصل من هذه المعادلة على أن

$$n = 143$$

اذا هناك 143 عدداً بين 1000 و 2000 يقبل القسمة على 7 .. يمكن ايجاد مجموع هذه الأعداد باستخدام القانون (11) .

$$s_{143} = \frac{143}{2}(1001 + 1995)$$

$$= 214214$$

نجد الآن قانون مجموع n من الحدود من متوالية هندسية .

نظرية «٢» :

اذا كان Sn يشير الى مجموع n من حدود متوالية هندسية حدها الأول a_1 وأساسها $r \neq 1$ فان

$$s_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (12)$$

البرهان :

باستحدام(5) نحصل على

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \qquad (13)$$

بضرب طرفي(13) في r نحصل على

$$s_n r = a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^n \qquad (14)$$

نطرح معادلة(14) من(13) فنحصل على

$$s_n - s_n r = s_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n = a_1(1-r^n)$$

إذاً

$$s_n(1-r) = a_1(1-r^n) \qquad (15)$$

بما ان $r \neq 1$ ، اذا $1 - r \neq 0$. بقسمة طرفي(15) على $1 - r$ نحصل على

$$s_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

وهو المطلوب .

مثال «٣» :

أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى من متوالية هندسية حدها الأول 9 وأساسها $\frac{1}{3}$

الحل :

باستحدام(12) نجد ان

$$S_5 = 9 . \frac{1-(\frac{1}{3})^5}{1-(\frac{1}{3})} = 9 . \frac{1-(\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{3}$$

$$= 9 . \frac{3 - (\frac{1}{3})^{4}}{3 - 1}$$

$$= \frac{9}{2} \left[3 - (\frac{1}{3})^{4} \right]$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{1}{18}$$

$$= \frac{243 - 1}{18}$$

$$= \frac{242}{18}$$

$$= \frac{121}{9}$$

مثال «٤» :

افرض ان مبلغ P من الريالات استثمر بربح مركب بمعدل i للريال في السنة . برهن انه بعد مضي n من السنوات تكون جملة المبلغ P_n كما يلي :

$$(17) \quad P_n = P(1 + i)^n$$

الحل :

مبلغ P من الريالات تستثمر بمعدل i في السنة لكل ريال ، سيكسب Pi من الريالات بعد مضي سنة واحدة . وعليه فان جملة المبلغ بعد مضي سنة واحدة ستكون

$$P_1 = P + Pi = P(1 + i)$$

اذا تركت هذه الجملة سنة أخرى في الاستثمار فانها سوف تكسب

$$P_1 i = P(1 + i) i$$

وعليه فسيكون لدينا

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + P_1 i \\ &= P_1 (1 + i) \\ &= P(1 + i)(1 + i) \\ &= P(1 + i)^2 . \end{aligned}$$

بنفس الطريقة

$$P_3 = P_2 + P_2 i$$
$$= P_2 (1 + i)$$
$$= P (1 + i)^2 (1 + i)$$
$$= P (1 + i)^3$$

وبصورة عامة

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} i$$
$$= P_{n-1} (1 + i)$$
$$= P (1 + i)^n$$

لاحظ ان المتتابعة المعرفة حسب القاعدة

$$P_n = P_{n-1} (1 + i)$$

تمثل متوالية هندسية .

تمارين (٣) :

أي من المتتابعات في المسائل من 1 الى 10 هي متوالية عددية لكل متوالية عددية أوجد الأساس والحد العام و S_{12} (مجموع 12 حدود الأولى) .

1) $1, 3, 5, 7, \ldots$

2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

3) $4, 7, 10, 12, \ldots\ldots$

4) $7, 5, 3, 1, \ldots\ldots\ldots$

5) $-8, -3, 2, 7, \ldots\ldots\ldots$

6) $4, 1, -2, -5, \ldots\ldots\ldots$

7) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \ldots\ldots$

8) $a - d, a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots\ldots$

9) $3x^2, 7x^2, 11x^2, 15x^2, \ldots\ldots\ldots$

10) $2.3, 5.5, 8.7, 11.9, \ldots\ldots\ldots$

أي من المتتابعات في المسائل من 11 الى 18 هي متوالية هندسية ؟ لكل متوالية

هندسية أوجد أساس المتوالية(r) والحد العام و S_5 (مجموع5 حدود الأولى) .

11) 2,6,18,.....

12) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots$

13) $5, -10, 20, \ldots\ldots\ldots\ldots$

14) $4, \frac{8}{7}, \frac{12}{49}, \ldots\ldots$

15) $1.1, -2.2, 3.2, \ldots\ldots\ldots$

16) $-2, 6, -3.2, \ldots\ldots\ldots$

17) $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots\ldots\ldots$

18) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots$

19 . لو ان t,s,r,q,p هي خمسة حدود متتالية في متوالية عددية ، اثبت ان

$p + t = q + s = 2r$

20 . ما هو عدد حدود المتوالية العددية

1,3,5,7,......

حتى تصل الى255 ؟

21 . ما هو عدد حدود المتوالية العددية

24, 20, 16,.......

حتى تصل الى20 - ؟ هل هناك حل واحد فقط ؟

22 . أوجد مجموع العشرين حد الأولى في متوالية عددية حدها الخامس26 وحدها الثاني عشر19 .

23 . أوجد عدد الأعداد التي تقع بين100 و500 التي تقبل القسمة على3 وأوجد مجموعها .

24. أوجد مجموع جميع الأعداد الطبيعية من 1 الى 100 التي لا تقبل القسمة على 3 .

25. أوجد مجموع جميع الأعداد الطبيعية من 1 الى 100 التي لا تقبل القسمة على 3 أو 7 .

26. أوجد ثلاثة حدود متتالية في متوالية عددية اذا كان

(a) مجموعها هو 30 وحاصل ضربها هو 910

(b) مجموعها هو 21 ومجموع مربعاتها هو 179 .

ملحوظة :

افرض ان الأعداد الثلاثة هي $a + d$ و a و $a - d$

27. أوجد العناصر المطلوبة في كل متوالية هندسية باستخدام العناصر المعطاة .

a) $a_1 = 2, s_3 = 26 : r$

b) $a_1 = \frac{5}{11}, r = 3, s_n = 55 : n$

c) $a_6 = 96, \quad a_{19} = 1536, a_1 : r$

d) $a_3 = \frac{9}{4}, a_7 = \frac{4}{9} : s_7$

e) $a_1 = 0.002, r = 10, a_n = 2000, n$

28. اذا كانت الحدود رقم $3n, 2n, n$ في متوالية هندسية هي z, y, x على التوالي اثبت ان

$y^2 = x z$

في المسائل من 29 إلى 32 اوجد مجموع ما يأتي :

29) $\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

30) $\sum_{i=1}^{6} z\, i$

31) $\sum_{j=2}^{8} (-3)^i$

32) $\sum_{k=1}^{6} \left(\frac{3}{4}\right)^k$

33 . اجمع حتى الحد n :

a) $0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots\ldots\ldots$

b) $0.5 + 0.55 + 0.555 + \ldots\ldots\ldots$

c) $6 + 66 + 666 + \ldots\ldots\ldots$

d) $1 + 11 + 101 + 1001 + \ldots\ldots\ldots$



الباب التاسع
طرق العد

في كثير من الأحيان نرغب في حساب عدد الطرق الممكنة لحدوث عمليات مختلفة . ندرس في هذا الباب بعض هذه الطرق .

(٩ ـ ١) القاعدة الأساسية للعد :

تستخدم معظم طرق العد القاعدة الأساسية التالية .

قاعدة العد الاساسية

اذا كان بالامكان انجاز عملية ما في N من الطرق وانجاز عملية أخرى في M من الطرق فيمكن انجاز العمليتين بالتتابع (الأولى أولاً ثم الثانية) في N.M من الطرق . ويمكن تعميم هذه القاعدة الى أي عدد من العمليات .

عند تطبيق هذه القاعدة في حالة K من العمليات يمكن النظر اليها بالطريقة التالية . افرض ان عليك ان تملأ K من الأماكن

____ 1 ____ 2 ____ 3 .... ____ k

ولنفرض ان هناك n_1 من الأشياء التي يمكن أن توضع في المكان الأول وان هناك n_2 من الأشياء التي يمكن ان توضع في المكان الثاني ، وأن هناك n_k من الأشياء التي يمكن وضعها في المكان الأخير . فان المجموع الكلي لعدد الطرق التي يمكن بها ملأ الأماكن جميعها هو $(n_1)(n_2)(n_3)\ldots\ldots.(n_k)$

مثال «١» :

ما هو عدد الكلمات المكوّنة من ثلاثة حروف والتي يمكن تكوينها من حروف الهجاء الانجليزية (يمكن تكرار أي حرف) مع العلم ان عدد حروف الهجاء الانجليزية 26 .

كالكلمات DMR, RCP, MGM, KEO

(الحل) :

يمكن اعتبار ان هناك ثلاثة أماكن :

____ ، ____ ، ____

الحرف الثالث ، الحرف الثاني ، الحرف الأول

لدينا26 امكانية لكل مكان . وعليه فان عدد الكلمات ذات ثلاثة أحرف هو

$$(26)(26)(26) = 17576$$

مثال «٢» :

ما هو عدد الكلمات المكوّنة من ثلاثة أحرف (بشرط عدم استعمال أي حرف اكثر من مرة واحدة)

(الحل) :

لدينا26 امكانية للمكان الأول . بعد ملأ المكان الأول يبقى لدينا25 امكانية فقط للمكان الثاني ، لأننا لا نسمح باعادة استعمال الحرف مرة أخرى . وأخيراً بعد ملأ المكانين الأوّلين ، يكون لدينا24 امكانية للمكان الثالث . إذاً ، عدد الكلمات المكوّنة من ثلاثة أحرف (بدون تكرار أي حرف) هو

$$(26)(25)(24) = 15600$$

مثال «٣» :

نرغب في عمل لوحات أرقام للسيارات على أن يكون رقم كل سيارة مكوّناً من ثلاثة حروف تتبعها ثلاثة أرقام على ألاّ يكون الرقم الأول صفرا .

(أ) ما هو عدد لوحات أرقام السيارات الممكن صنعها بهذه الطريقة ؟

(ب) اذا كان تكرار الحرف أو الرقم غير مسموح به فما هو عدد لوحات أرقام السيارات الممكن صنعها ؟

(الحل) :

(أ)

___ ___ ___ ___ ___ ___

ثلاثة أرقام ثلاثة حروف

هناك ثلاثة أماكن يجب ملؤها باختيار حرف من 26 حرفاً ومكان واحد يجب ملؤه برقم من الأرقام التسعة .

1,2, ..., 9

ومكانان يجب ملؤهما باختيار أرقام من الأرقام

0, 1, 2, ..., 9

إذاً المجموع الكلي للامكانيات هو

$$(26)(26)(26)(9)(10)(10) = 15,818,400$$

(ب) كما هي الحالة في المثال السابق لدينا 26 امكانية للمكان الأول ، 25 امكانية للمكان الثاني و 24 امكانية للمكان الثالث وهناك تسع امكانيات للمكان الرابع وتسع امكانيات للمكان الخامس وثمان امكانيات للمكان السادس . اذا المجموع الكلي للامكانيات هو

$$(26)(25)(24)(9)(9)(8) = 10,108,800$$

(٩ ـ ٢) التباديل :

يعرف مفهوم التبديلة كما يلي :

تعريف :

أي تنظيم مرتب لـ n من الأشياء المتميزة يسمى تبديلة Permutation

---

مثال «٤» :

اعتبر الحروف A و B و C . فيما يلي جميع التباديل الممكنة لهذه الحروف الثلاثة

ABC	BCA
ACB	CAB
BAC	CBA

وهكذا فان هناك ستا من التباديل الممكنة .

ملحوظة :

في مسائل التباديل لا يسمح بالتكرار . أي أن BAC تبديلة للحروف A و B و C ولكن AAB ليست تبديلة .

مثال «٥» :

ما هو عدد التباديل التي يمكن تكوينها من الأرقام 5 و 4 و 3 و 2 و 1 ؟

(الحل) :

يمكننا ان نفكر بأن لدينا خمسة أماكن ينبغي ملؤها .

لدينا خمس امكانيات للمكان الأول وأربع امكانيات للمكان الثاني وهكذا . وعليه فان عدد التباديل هو

$$(5)(4)(3)(2)(1) = 120$$

تعريف :

يعرف

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2.1 = 2$$

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

وبصفة عامة

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(2)(1)$$

يسمى الرمز $n!$ مضروب n (Factorial n)

فيما يلي تعريف لعدد التباديل :

تعريف :

اذا كان لدينا n من الأشياء المتميزة فان أي تنظيم مرتب لـ r من هذه الأشياء يسمى تبديلة n من الأشياء مأخوذة r كل مرة . العدد الكلي لتباديل n من الأشياء المتميزة مأخوذة r كل مرة يرمز له بالرمز $P(n, r)$ ويستعمل أحياناً الرمز nP_r بدلاً من الرمز $P(n, r)$

مثال «٦» :

اعتبر الحروف A و B و C و D و E

(أ) عدِّد بعض (لا جميع) التباديل لهذه الحروف الخمسة مأخوذة ثلاث في كل مرة .

(ب) احسب قيمة $P(5,3)$.

(الحل) :

(أ)

A D E

E B D

D A E

C B D

(ب) p (5,3) يشير الى عدد التباديل لـ (5) أشياء متميزة مأخوذة 3 في كل مرة لحساب قيمة p (5,3) يمكننا ان نفكر أن علينا ملأ ثلاثة أماكن

الثالث	الثاني	الأول

عندنا خمس امكانيات للمكان الأول وأربع امكانيات للمكان الثاني وثلاث امكانيات للمكان الثالث . وعليه فان

$$P(5,3) = 5.4.3 = 60$$

تستعمل نفس طريقة الأمثلة السابقة في اثبات النظرية التالية :

نظرية :

عدد تباديل n من الأشياء المتميزة مأخوذة r كل مرة يمكن حسابه كما يلي

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.[n-r+1].(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P(n,r) = \boxed{\frac{n!}{(n-r)!}}$$

وعليه فان عدد تباديل n من الأشياء المتميزة هو

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

(٩ - ٣) التوافيق :

التبديلة عبارة عن تنظيم مرتب وعليه فكلما تغير الترتيب نحصل على تبديلة جديدة . في حالة الفئات لا أهمية لترتيب العناصر فيها . فمثلاً

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

تمثل ست تبديلات . بينما

{A,B,C} , {A, C,B} , {B,A,C} , {B,C,A} , {C,A,B} , {C,B,A}

تدل كلها على نفس الفئة ، حيث ان تغيير ترتيب العناصر لا يغير الفئة . نستخدم عادة كلمة توفيقة Combination بدلاً من كلمة فئة . أو بعبارة أخرى ان التوفيقة عبارة عن فئة .

مثال «٧» :

اعتبر الحروف

A,B,C,D

عدِّد جميع التوافيق المتكونة من ثلاثة من هذه الحروف الأربعة .

(الحل) :

{A,B,C}

{A,B,D}

{A,C,D}

{B,C,D}

لاحظ ان {A,A,B} لا تعتبر توفيقة من ثلاثة حروف ، حيث أن {A,A,B} هي بالضبط الفئة {A,B} والتي تعتبر توفيقة من حرفين .

يعتبر التعريف التالي مفيداً بالنسبة لبعض المفاهيم القادمة .

تعريف :

يرمز لعدد التوافيق لـ n من الأشياء المتميزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $\binom{n}{r}$. يكتب هذا الرمز أحياناً بشكل $C(n,r)$ أو nC_r .

نرى من مثال «٧» ان عدد التوافيق لـ 4 من الأشياء المتميزة مأخوذة 3 في كل مرة هو

$$\binom{4}{3} = 4$$

تبين النظرية التالية ان طرق عد عدد التوافيق وعدد التباديل مترابطة ترابطاً قوياً .

نظرية :

عدد التوافيق لـ n من الأشياء مأخوذة r كل مرة يعطى حسب القاعدة

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

البرهان :

افرض ان لدينا n من الأشياء المتميزة ولتكن

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

لنفرض اننا اخترنا r من هذه الأشياء . تعطي هذه الأشياء التي اختيرت r ! من التباديل ولكنها تعطي توفيقة واحدة فقط ، وعليه فمن الواضح ان

$$\left(\begin{array}{c}\text{عدد التباديل لـ n من}\\ \text{الأشياء مأخوذة r كل مرة}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{عدد التوافيق لـ n من}\\ \text{الأشياء مأخوذة r كل مرة}\end{array}\right)(r!)$$

أي أن

$$(r!)\binom{n}{r} = P(n,r)$$

أو

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r\,!} = \frac{\dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}}{r\,!} = \frac{n\,!}{r!\,(n-r)\,!}$$

وهو المطلوب .

مثال «٨» :

ما هو عدد اللجان المؤلفة من خمسة أشخاص التي يمكن اختيارهـا من بين 15 شخصاً؟

(الحل) :

المطلوب في هذه المسألة ايجاد عدد التوافيق لـ 15 شيئاً مأخوذة5 في كل مرة ـ وعليه فان العدد المطلوب هو

$$\binom{15}{5} = \frac{15\,!}{5\,!\,(15-5)\,!} = \frac{15\,!}{5\,!\;10\,!} = \frac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2.1}$$
$$= 3003$$

مثال «٩» :

أوجد عدد الطرق التي تصل بها لجنة مؤلفة من ستة اشخاص الى اتخاذ قرار

(الحل) :

يمكن اتخاذ قرار في الحالات التالية :

(أ) أربعة اشخاص يصوتون مع القرار وشخصان يصوتون ضد القرار .

(ب) خمسة اشخاص يصوتون مع القرار وشخص يصوت ضد القرار .

(جـ) جميع الأشخاص يصوتون مع القرار .

عدد الطرق التي يصوت فيها اربعة اشخاص مع القرار هو$\binom{6}{4}$ ، وعدد الطرق التي يصوت فيها خمسة اشخاص مع القرار هو$\binom{6}{5}$ وعدد الطرق التي يصوت فيها ستة

اشخاص مع القرار هو $\binom{6}{6}$. وعليه فان عدد الطرق التي تتخذ فيه اللجنة قرارها هو

$$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=\frac{6!}{4!\ 2!}+\frac{6!}{5!\ 1!}+\frac{6!}{6!\ 0!}$$

$$=15+6+1$$

$$=22$$

مثال «١٠» :

مجموعة كتب مكوّنة من ثمانية كتب أساليب كمية وسبعة كتب محاسبة . يرغب طالب في اختيار عشرة من هذه الكتب على أن تكون ستة منها من كتب الأساليب الكمية وأربعة منها من كتب المحاسبة . أوجد عدد الطرق الممكن فيها اختيار هذه الكتب .

(الحل) :

يمكن اعتبار هذه المسألة كأنها عمليتان منفصلتان . يمكن اختيار ستة كتب أساليب كمية أولاً ثم اختيار اربعة كتب محاسبة . يمكننا اختيار كتب الأساليب الكمية الستة بـ

$$\binom{8}{6}=\frac{8!}{6!\ 2!}=\frac{8.7}{2.1}=28$$ طريقة

ويمكننا اختيار كتب المحاسبة الأربعة بـ

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\ 3!}=\frac{7.6.5}{3.2.1}=35$$ طريقة

حسب القاعدة الأساسية للعد يمكن اجراء العمليتين بـ

$$(28)(35)=980$$

اذا يمكن اختيار هذه الكتب بـ**980 طريقة** .

تمارين (١) :

1 . بكم طريقة يمكن ترتيب الحروف A,B,C,D .

2 . افترض ان لوحة أرقام السيارة يجب ان تشتمل على حرفين وأربعة أرقام (المجموع الكلي للحروف هو 26) أوجد عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بشرط :

(أ) الرقم الأول لا يمكن ان يكون صفراً .

(ب) ألا يكون أي رقم صفرا .

(جـ) لا يسمح بالتكرار بين الحرفين .

(د) لا يسمح بالتكرار بين الحرفين وبين الأرقام الأربعة .

3 . ما هو عدد المجموعات المكونة من ثلاثة حروف الممكن تكوينها باستخدام الحروف V,T,S,R,M,D اذا كان :

(أ) تكرار الحرف مسموحاً به ؟

(ب) تكرار الحرف غير مسموح به ؟

4 . ما هو عدد النتائج الممكنة في سباق يتكون من خمسة خيول سباق ؟

5 . ستدخل عشر سيارات سباقاً ما . بكم طريقة يمكن ان تمنح جوائز المركز الأول والثاني والثالث ؟

6 . ما هو عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام والتي يمكن تكوينها اذا كان

(أ) التكرار غير مسموح به ؟

(ب) التكرار مسموحاً به ؟

7 . ما عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف والتي يمكن تكوينها باستخدام الحروف F,E,D,C,B,A بشرط عدم تكرار أي حرف ؟ (الكلمة هي أي ترتيب من الحروف) .

8 . ما عدد اللجان المكونة من أربعة اشخاص والتي يمكن اختيارها من مجموعة من 10 أشخاص ؟

9 . ما عدد الطرق التي يتم بها تبديل الأرقام 2,3,5,7,8,9 ؟

10 . ما عدد الطرق التي يتم بها تبديل الحروف A,B,C,D,E ؟

11 . خذ في الاعتبار الحروف A,B,C,D,E,F . أذكر بعض التباديل لهذه الحروف الست آخذاً أربعة حروف في كل مرة . ما عدد الطرق التي يتم بها تبديل هذه الحروف الست آخذاً أربعة حروف في كل مرة ؟

12 . خذ في الاعتبار الحروف A,B,C,D,E,F . أذكر بعض التوافيق لهذه الحروف آخذاً أربعة حروف في كل مرة . ما عدد التوافيق الممكنة لهذه الحروف الست آخذاً أربعة حروف في كل مرة ؟

13 . بكم طريقة يمكن للجنة من سبعة أشخاص ان يصلوا الى قرار الأغلبية ؟

14 . بكم طريقة يمكن لمجموعة من ثمانية أشخاص أن يصلوا الى قرار الأغلبية ؟

15 . بكم طريقة يمكن لفصل من 30 طالباً ان يختار رئيساً ونائباً وأميناً للسر ؟

16 . فصل يتكون من 15 طالب أساليب كمية و 10 طلاب محاسبة :

(أ) ما عدد اللجان المكوّنة من 7 طلاب والتي يمكن تكوينها من طلبة هذا الفصل ؟

(ب) ما عدد اللجان المكوّنة من 7 طلاب والتي يمكن تكوينها بشرط ان تحتوي كل لجنة على 4 طلبة فقط من الاساليب الكمية ؟

(جـ) ما عدد اللجان المكوّنة من 7 طلاب والتي يمكن تكوينها بشرط ان تحتوي اللجنة على 4 طلاب على الأقل من الأساليب الكمية ؟

17 . أوجد قيمة كل مما يأتي :

(a) $P(7,3)$ (b) $\binom{10}{4}$ (c) $P(10,7)$ (d) $\binom{12}{7}$

18. بكم طريقة يمكن ان يجلس 6 اشخاص على 6 مقاعد متميزة ؟

19. بكم طريقة يمكن ان يجلس 6 اشخاص على 10 مقاعد ؟

20 . مجموعة طلبة مكوّنة من 12 طالب اقتصاد و 8 طلاب ادارة . ونحتاج الى 9 لاعبين لفريق ما :

(أ) ما هو عدد الفرق التي يمكن تكوينها لو ان الفريق يجب أن يشتمل على 4 طلاب ادارة ؟

(ب) ما هو عدد الفـــرق التي يمكن تكوينها لو ان الفريق يجب ان يشتمل على 4 طلاب اقتصاد على الأقل ؟

21 . بكم طريقة يمكن اختيار 5 لاعبين من مجموعة مكونة من 8 لاعبين ؟

(٩ - ٤) نظرية ذات الحدين :

مقدار ذو حدين هو أي تعبير جبري يحتوي على حدين فقط تفصلهما علامة (+) أو (−) . فمثلاً $(x + y)$ و $2x - 5$ و $1/2 - 3y$ و $x^2 + 5y^2$ جميعها مقادير ذات حدين .

سوف نستنتج في هذا الفصل قاعدة لكل قوة n لمقدار ذي حدين . أي أننا سوف نستنتج قاعدة $(a + b)^n$ حيث a و b أعداد و n عدد صحيح موجب . لننظر أولاً الى بعض الأمثلة

$$(a + b)^1 = a + b \quad n = 1$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad n = 2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2 b + ab^2 + a^2 b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \quad n = 3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3$$

$$= (a + b)(a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3)$$

$$= a^4 + 3a^3 b + 3a^2 b^2 + ab^3 + a^3 b + 3a^2 b^2 + 3ab^3 + b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad n = 4$$

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)^4$$

$$= (a + b)(a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4)$$

$$= a^5 + 4a^4 b + 6a^3 b^2 + 4a^2 b^3 + ab^4 + a^4 b + 4a^3 b^2 + 6a^2 b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 ab^4 + b^5 \quad n = 5$$

نلاحظ من الأمثلة السابقة الخواص التالية .

خواص مفكوك $(a + b)^n$

١ ـ ان الحد الأول هو a^n ، وأن الحد الأخير هو b^n .

٢ ـ كلما نتتقل من الحد الأول الى الحد الأخير يتناقص أس a بمقدار 1 ويتزايد أس b بمقدار 1 .

٣ ـ مجموع أسس a و b في كل حد يساوي n .

٤ ـ يوجد $n + 1$ من الحدود في المفكوك .

٥ ـ القيمة العددية لمعامل الحد الأول هو $\binom{n}{0}$ ، والقيمة العددية لمعامل الحد الثاني هو $\binom{n}{1}$ والقيمة العددية لمعامل الحد الثالث هو $\binom{n}{2}$ وهكذا .

تذكر انه عندما تكون $0 \leq r \leq n$

فان

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

باستخدام الخواص السابقة نتوصل الى نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

---

نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

لكل عدد صحيح موجب n

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

مثال «١» :

أوجد مفكوك $(x + 2y)^4$

(الحل) :

في هذه المسألة $n = 4$ والقيم العددية للمعاملات هي

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\ 4!} = 1, \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\ 3!} = 4, \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6,$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\ 1!} = 4, \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\ 0!} = 1$$

ونلاحظ ان

$$(x + 2y)^4 = [x + (2y)]^4$$

إذاً

$$a = x \quad b = 2y$$

$$(x + 2y)^4 = x^4 + 4x^3(2y) + 6x^2(2y)^2 + 4x(2y)^3 + (2y)^4$$

$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

مثال «٢» :

أوجد مفكوك $(2x^2 - 3y)^6$

(الحل) :

هنا $n = 6$ والقيم العددية للمعاملات هي

$$\binom{6}{0} = \frac{6!}{6!\ 0!} = 1, \binom{6}{1} = \frac{6!}{1!\ 5!} = 6, \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\ 4!} = 15,$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = 20, \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\ 2!} = 15, \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\ 1!} = 6,$$

$$\binom{6}{6} = \frac{6!}{6!\ 0!} = 1$$

نعيد كتابة المقدار بالشكل التالي

$$(2x^2 - 3y)^6 = [(2x^2) + (-3y)]^6$$

نلاحظ ان $a = 2x^2$ و $b = -3y$ وعليه فان

$$(2x^2-3y)^6=(2x^2)^6+6(2x^2)^5(-3y)+15(2x^2)^4(-3y)^2+20(2x^2)^3(-3y)^3$$

$$+15(2x^2)^2(-3y)^4+6(2x^2)(-3y)^5+(-3y)^6$$

$$=64x^{12}-576x^{10}y+2160x^8y^2-4320x^6y^3+4860x^4y^4$$

$$-2916x^2y^5+729y^6$$

مثال «٣» :

أوجد الحدود الأربعة الأولى في مفكوك .

$$(2x-y)^{10}$$

(الحل) :

هنا نرى أن10 = n وعليه فان القيم العددية لمعاملات الحدود الأربعة الأولى هي

$$\binom{10}{0}=\frac{10!}{10!\ \ 0!}=1,\binom{10}{1}=\frac{10!}{1!\ \ 9!}=10,$$

$$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\ \ 8!}=45,\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\ \ 7!}=120$$

نكتب المقدار بشكل

$$(2x-y)^{10}=[(2x)+(-y)]^{10}$$

الحد الأول هو

$$(2x)^{10}=1024x^{10}$$

الحد الثاني هو

$$10(2x)^9(-y)=-5120x^9y$$

الحد الثالث هو

$$45(2x)^8(-y)^2=11520x^8y^2$$

الحد الرابع هو

$$120(2x)^7(-y)^3 = -15360x^7y^3$$

نستنتج من نظرية ذات الحدين أن

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \frac{n!}{0!\ n!}a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n!}{n!\ 0!}b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

مثال «٤» :

أوجد مفكوك $(x-3y^2)^4$

الحل :

باستخدام نظرية ذات الحدين نجد أن

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{4!\ 0!} = 1,\ \binom{4}{1} = \frac{4!}{3!\ 1!} = 4,\ \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6,$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\ 3!} = 4,\ \binom{4}{4} = \frac{4!}{0!\ 4!} = 1.$$

يمكن كتابة

$$(x-3y^2)^4 = [x+(-3y^2)]^4$$

$$(x-3y^2)^4 = x^4 + 4x^3(-3y^2) + 6x^2(-3y^2)^2 + 4x(-3y^2)^3 + (-3y^2)^4$$

$$= x^4 - 12x^3y^2 + 54x^2y^4 - 108\times y^6 + 81y^8.$$

مثال «٥» :

أوجد الحد السادس في مفكوك

$$(x^2 - 2y)^{11}$$

الحل :

الحد الذي مرتبته $(r + 1)$ في مفكوك $(x + a)^n$ هو

$$\binom{n}{r} x^{n-r} a^r$$

وعليه فان الحد السادس في مفكوك $(x^2 - 2y)^{11}$ هو

$$\binom{11}{5} (x^2)^{11-5} (-2y)^5 = \frac{11!}{6!\ 5!} (x^2)^6 (-32y^5)$$

$$= \frac{11.10.9.8.7.6!}{6!.5.4.3.2.1!} x^{12} (-32y^5)$$

$$= (-32)(462) x^{12} y^5$$

$$= -14{,}784 x^{12} y^5.$$

مثال «٦» :

أوجد الحد الخالي من x في مفكوك $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$

الحل :

لاحظ ان أس x يساوي صفراً في الحد الخالي من x . كذلك فان الحد الذي رتبته $(r + 1)$ هو

$$\binom{10}{r} (x^{1/2})^{10-r} \left(\frac{-2}{x^2}\right) = \binom{10}{r} x^{5-r/2} (-2)^r x^{-2r}$$

$$= \binom{10}{r} (-2)^r x^{5-r/2-2r}$$

وعليه فان

أو

$$5 - \frac{5}{2} r = 0$$

$$r = 2.$$

اذا الحد المطلوب هو

$$\binom{10}{2}(-2)^2 x^0 = \frac{10!}{8!\ 2!} \cdot 4$$

$$= (45)(4)$$

$$= 180.$$

تمارين (٢) :

في التمارين من1 الى20 بسّط ما يأتي مستخدماً نظرية ذات الحدين .

1. $(x+y)^5$
2. $(2x+y)^4$
3. $(a+3b)^4$
4. $(x-2y)^6$
5. $(2x-y)^6$
6. $(3a+b)^4$
7. $(x^2+2y)^4$
8. $(2x^3-3y^2)^4$
9. $(3z^2-2w)^6$
10. $(2x^2-3y^2)^5$
11. $(a^3-b)^7$
12. $(a+2b)^7$
13. $(3x-2y)^6$
14. $(s-t)^5$
15. $(3s+2t)^5$
16. $(a-4b)^5$
17. $(u-2v)^6$
18. $(u^2+v^4)^4$
19. $(x+y)^{10}$
20. $(x-y)^{10}$

في التمارين من21 الى26 احسب قيمة المقدار مستخدماً نظرية ذات الحدين مقرباً النتيجة الى اربعة أرقام عشرية .

21. $(1.02)^4 = (1+0.02)^4$
22. $(1.01)^5$
23. $(2.03)^4$
24. $(3.04)^4$
25. $(2.05)^4$
26. $(2.01)^6$

27 . أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك $(2x-3y)^{10}$

28 . أوجد الثلاثة حدود الأولى في مفكوك $(x+2y)^8$

29 . أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك $(2a^2+3b)^9$

30 . أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك $(x-y)^{20}$

31 . أوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك $(x-y)^{20}$

32 . أوجد الحد الخامس في مفكوك $(x-2y)^{20}$

33 . أوجد الحد الرابع في مفكوك $(2x-3y)^{10}$

34 . أوجد الحد السابع في مفكوك $(x^2+y)^{15}$

35 . أوجد الحد السادس في مفكوك $(x^2+2y^2)^{10}$

الباب العاشر

نظرية الاحتمالات

يهدف هذا الباب الى عرض مبسّط لمفهوم نظرية الاحتمالات وبعض القوانين الأساسية فيها .

(١٠ - ١) المفاهيم الأساسية :

غالباً ما تستعمل كلمة احتمال(Probability) مرادفة لكلمة فرصة(Chance) للاشارة الى امكانية حدوث حدث (Event) ما . فيما يلي بعض التعاريف الأوّلية وأمثلة عليها .

التجربة : (Experiment) عبارة عن عملية نعرف مقدّماً جميع نتائجها ولكننا لا نعرف على وجه التأكيد أية نتيجة منها ستحدث .

فراغ العينة : (Sample Space) لأية تجربة هو الفئة المكوّنة من جميع النتائج الممكنة والمتميزة للتجربة « all possible distinct outcomes »

مثال «١» :

فيما يلي بعض الأمثلة لتجارب .

(أ) رمى زهرة نرد .

(بـ) اختيار ورقة بطريقة عشوائية من مجموعة ورق لعب اعتيادية مكوّنة من 52 ورقة .

(جـ) رمى زهرتي نرد احداهما حمراء والأخرى خضراء .

(د) رمى ثلاث قطع نقود متميزة مرة واحدة .

(هـ) اختيار طالب واحد بطريقة عشوائية من مجموع طلاب جامعة الملك سعود .

فراغات العينة المناظرة لهذه التجارب هي :

(أ) $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ (بـ) S = { 52 ورقة اللعب }

(جـ) $S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$

$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$

.

.

.

$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

هنا يشير الرقم الأول في كل زوج مرتب الى الزهرة الأولى والرقم الثاني يشير الى الزهرة الثانية .

(د) $S = \{ (H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)$

$(T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), (T,T,T) \}$

في فراغ العينة هذا يشير(H,T,H) الى أن قطعة النقود الأولى تظهر شعاراً والثانية تظهر كتابة والثالثة تظهر شعاراً .

(هـ) { اسماء كافة طلاب جامعة الملك سعود } = S

تعريف :

الحدث : Event عبارة عن أية فئة جزئية لفراغ العينة

مثال «٢» :

في مثال «١» (أ) كان فراغ العينة

$$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

كل من الفئات التالية تمثل حدثاً

$$A = \{ 1,2\}, B = \{ 2,3,6\}, C = \{2\}, D = \{ 1,2,3,4\}, \phi$$

نصف أحياناً الحدث باستخدام كلمات بدلاً من الرموز كما هو موضح في المثال التالي :

مثال «٣» :

في مثال «١» (جـ) افرض ان

$A =$ «المجموع يساوي 7 »

$B =$ «الزهرتان تظهران نفس العدد»

وعليه فان

$A = \{ (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) \}$

$B = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$

في مثال «١» (د) افرض ان

$A =$ «بالضبط شعاران»

$B =$ «على الأقل شعاران»

وعليه فان

$A = \{(H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)\}$

$B = \{ (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,H,H) \}$

لاحظ ان «على الأقل شعاران» يعني «بالضبط شعاران أو بالضبط ثلاثه شعارات» .

نناقش في هذا الباب تجارب لها عدد محدود فقط من النتائج الممكنة . تهتم نظريه الاحتمالات في تعيين عدد لكل حدث . يسمى هذا العدد باحتمال وقوع الحدث .

لمعظم الناس احساس بديهي لما يجب أن يكون عليه الاحتمال . في حالة رمى قطعه نقود متزنة مثلاً يتفق معظم الناس بكل بساطة على ان احتمال الحصول على شعار يساوي $1/2$. وذلك لسبب بسيط وهو انه عند رمي قطعة النقود المتزنة عدداً كبيراً جداً من المرات يظهر الشعار في نصف الرميات تقريباً وتظهر الكتابة في النصف الآخر . واذا سحبنا ورقة عشوائياً من مجموعة ورق لعب متكوّنة من 52 ورقة . فان احتمال الحصول على ولد قلب هو $1/52$. وذلك لأن واحدة فقط من الـ 52 ورقة هي الولد القلب . واحتمال ان تكون الورقة المسحوبة ولداً هو $4/52$ أو $1/13$. وذلك لأن اربعة اوراق فقط من الـ 52 ورقة هي أولاد . ان مفاهيمنا البديهية للاحتمالات تدفعنا الى بعض البديهيات . فاذا كانت S

تمثل فراغ عينة تجربة ما وكان A حدثاً في هذه التجربة (تذكر ان الحدث هو أية فئة جزئية لفراغ العينة) ، فان احتمال وقوع A يرمز له بالرمز $P(A)$. ويجب ان تحقق قيم احتمالات الأحداث البديهيات التالية :

بديهيات الاحتمالات

1. $P(S) = 1$

لكل حدث A

2. $0 \leq P(A) \leq 1$

3. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

لكل حدثين A_1, A_2 يحققان الشرط

$A_1 \cap A_2 = \phi$

ويمكن استخدام هذه البديهيات في اثبات النظريات التالية :

نظرية «١» : $P(\phi) = 0$

البرهان :

بما ان

$S \cup \phi = S, S \cap \phi = \phi$

فان

$P(S \cup \phi) = P(S) = 1$

و

$P(S \cup \phi) = P(S) + P(\phi) = 1 + P(\phi)$

إذاً

$1 + P(\phi) = 1$

إذاً

$P(\phi) = 0$

قبل أن نثبت النظرية القادمة نقدم التعريف التالي :

تعريف :

افرض ان A حدث . مكمل الحدث A ، ويرمز له بالرمز $\bar{A}$ ، هو الحدث المكوّن من جميع النتائج في S والتي لا تنتمي الى الحدث A . أو بعبارة أخرى

$$\bar{A} = \{x) x \in S \quad , \quad x \notin A\}$$

فمثلاً في حالة رمي زهرة نرد ، اذا كان الحدث A يشير الى الحصول على عدد زوجي فان

$$A = \{2,4,6\}$$

و $\bar{A}$ هو الحدث الذي يمثل الحصول على عدد فردي ، أي أن

$$\bar{A} = \{1,3,5\}$$

وفي حالة رمي ثلاث قطع نقود مرة واحدة اذا كان A حدث الحصول على شعارين بالضبط . فان

$$A = \{ (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H) \}$$

و

$$\bar{A} = \{ (T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), (H,H,H), (T,T,T) \}$$

لاحظ ان لأي حدث A

$$A \cup \bar{A} = S, A \cap \bar{A} = \phi , \bar{\phi} = S, \bar{S} = \phi$$

نظرية «٢» :

لأي حدث A

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

البرهان :

بما ان

$$A \cup \bar{A} = S$$

فان

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$$

ولكن

$$A \cap \bar{A} = \phi$$

اذا

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

ونستنتج مما سبق أن

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

أي أن

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

وهو المطلوب .

نظرية «٣» :

لأي حدثين A و B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

يمكن استخدام أشكال فن في اعطاء برهان بديهي لهذه النظرية . لننظر الى الاحتمال كأنه مساحة .

أي أن

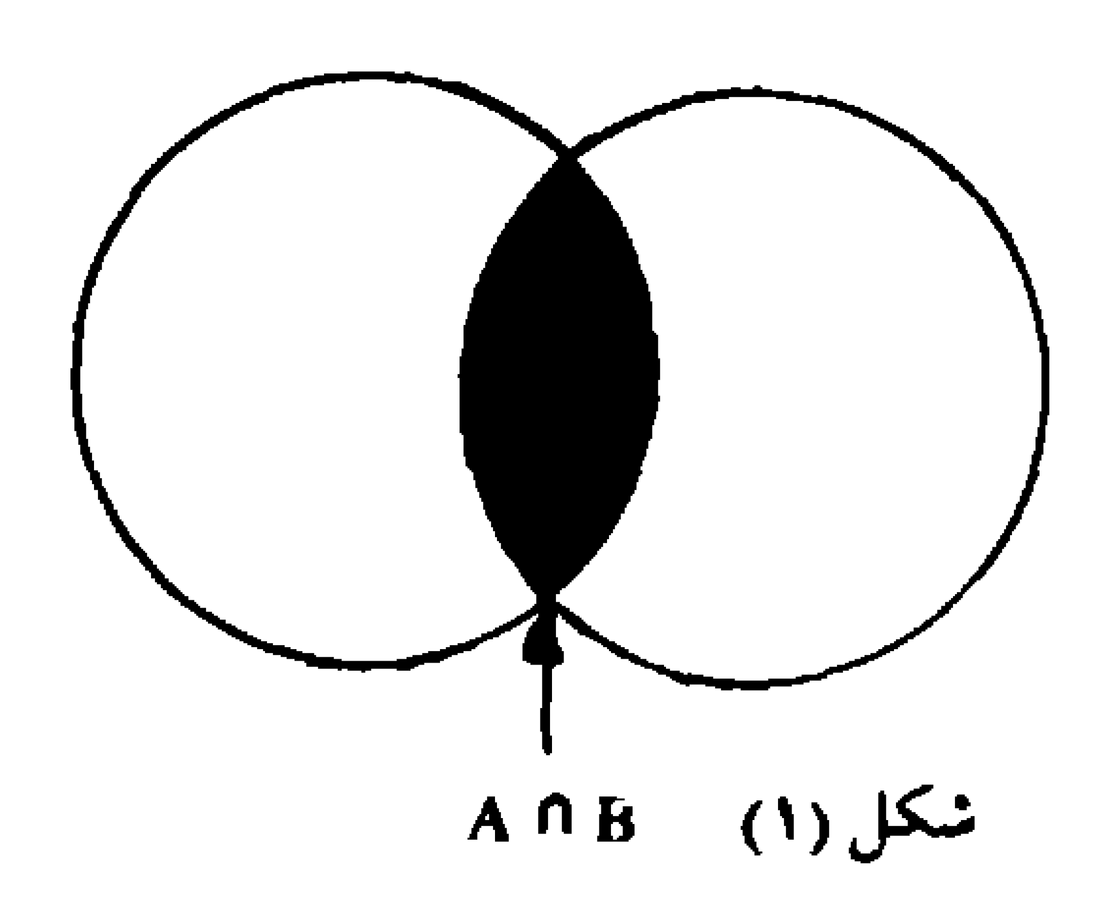
$P(A \cup B) = A \cup B$ مساحة

$P(A) = A$ مساحة

$P(B) = B$ مساحة

$P(A \cap B) = A \cap B$ مساحة

فواضح من شكل (١) ان



$A \cap B$ شكل (١)

مساحة $A \cup B$ = مساحة A + مساحة B - مساحة $A \cap B$

لاحظ وجوب طرح مساحة $A \cap B$ لأنها أضيفت مرتين . وعليه فان

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وهو المطلوب

اذا كانت a تمثل نتيجة واحدة لتجربة ، فاننا نكتب $P(a)$ بدلاً من $P(\{a\})$.

نظرية «٤» :

إذاً كان A حدثاً مكوناً من نقاط العينة

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$$

أي أن

$$A = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k\}$$

فان

$$P(A) = \sum_{r=1}^{k} P(x_r)$$

البرهان :

بما أن

$$A = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots\ldots \cup \{x_k\}$$

وأن

$$\{x_i\} \cap \{x_j\} = \phi, i \neq j$$

اذا

$$P(A) = P(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_k\})$$

$$= P(x_1) + P(x_2) + \ldots\ldots + P(x_k)$$

$$= \sum_{r=1}^{k} P(x_r)$$

وهو المطلوب .

لاحظ ان فراغ العينة يمثل حدثاً . ونستنتج من النظرية «٤» ان مجموع احتمالات جميع نتائج التجربة يساوي واحداً . اضافة لذلك اذا كنا نعرف جميع احتمالات نقاط فراغ العينة S فسيكون باستطاعتنا حساب احتمال أي حدث وذلك باستخدام النظرية «٤» . عند حل بعض تمارين الاحتمالات أكتب أولاً جميع نتائج S اذا كان ذلك ممكناً ، ثم عينّ احتمالاً لكل نتيجة . تذكر ان مجموع الاحتمالات لجميع نقاط فراغ العينة يساوي واحداً . ادرس الآن بكل عناية كلاً من الأمثلة التالية :

مثال «٤» :

لنفرض اننا نرمي زهرة متزنة ، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي ؟

(الحل) :

فراغ العينة هنا هو

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

بما ان الزهرة متزنة فان لجميع النتائج نفس امكانية الحدوث ، وعليه فان لكل نتيجة احتمال $1/6$. عرّف الحدث A = «حدث الحصول على عدد زوجي» ، اذا

$$A = \{2,4,6\}$$

ونرغب في ايجاد $P(A)$. ولكن حسب نظرية «٤» نجد ان

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

وسنذكر فيما بعد كيفية حساب الاحتمال .

مثال «٥» :

يذهب خالد الى السوق . افرض أن احتمال ان يشتري خالد خبزاً يساوي 0.4 ، وان احتمال ان يشتري لحماً يساوي 0.7 ، وان احتمال شرائه خبزاً ولحماً يساوي 0.3 . ما هو احتمال شراء خالد للخبز أو اللحم ؟

(الحل) :

عرّف الحدثين B,M كما يلي :

B = «خالد يشتري خبزاً» .

M = «خالد يشتري لحماً» .

إذاً

$$P(B) = 0.4$$

$$P(M) = 0.7$$

$$P(B \cap M) = 0.3$$

نرغب في حساب $P(B \cup M)$. ولكن حسب نظرية «٣»

$$P(B \cup M) = P(B) + P(M) - P(B \cap M)$$

$$= 0.4 + 0.7 - 0.3$$

$$= 0.8$$

مثال «٦» :

عند القاء زهرتين متزنتين ، ما هو احتمال

(أ) مجموع العددين يساوي 7 ؟

(ب) مجموع العددين يساوي 11 ؟

(جـ) الزهرتان تظهران نفس العدد ؟

(د) الزهرتان تظهران عددين مختلفين ؟

(الحل) :

في هذه الحالة

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

(هناك 36 نتيجة ممكنة في S) . بما ان الزهرتين غير متحيزتين (متزنتين) فان لجميع النتائج نفس امكانية الحدوث . وعليه فان لكل من النتائج الست والثلاثين احتمال $\frac{1}{36}$. عرف الحدثين A و B كما يلي :

A = «مجموع العددين يساوي 7 »

B = «مجموع العددين يساوي 11 »

إذاً

$$A = \{ (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) \}$$

$$B = \{ (5,6), (6,5 \}$$

وعليه باستخدام نظرية «٤» نحصل على

(أ)

$$P(A) = P(6,1) + P(1,6) + P(2,5) + P(5,2) + P(3,4) + P(4,3)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

(ب)

$$P(B) = P(5,6) + P(6,5)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

(جـ) عرف الحدث C = «الزهرتان تظهران نفس العدد» . اذا

$$C = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$$

اذا

$$P(C) = P(1,1) + P(2,2) + P(3,3) + P(4,4) + P(5,5) + P(6,6)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

(د) الحدث $\bar{C}$ = «الزهرتان تظهران عددين مختلفين» ، وعليه حسب نظرية «٢» نحصل على

P(الزهرتان تظهران عددين مختلفين) $= P(\bar{C}) = 1 - P(C)$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

اذا كانت جميع النتائج الموجودة في S لها نفس امكانية الحدوث فان احتمال كل نتيجة ممكنة يساوي $\frac{1}{n}$ ، حيث تمثل n عدد عناصر S . وبالتالي يكون احتمال حدوث أي حدث A $(A \subseteq S)$ هو :

$$P(A) = \frac{\text{عدد نتائج } A}{\text{عدد نتائج } S}$$

(١٠ - ٢) الأحداث المستقلة Independent Events :

يسمى الحدثان A وB مستقلين اذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر في احتمال حدوث الاخر . توضّح الأمثلة التالية هذا المفهوم .

مثال «٧» :

يحتوي كيس على سبع كرات حمراء وثلاث كرات زرقاء . سحبت كرتان من الكيس بصورة متتالية وبارجاع (أي انه بعد اختيار الكرة الأولى تعاد الى الكيس ثم تسحب الكرة الثانية من مجموعة الكرات العشرة الأصلية) . افرض ان R_1 و R_2 حدثان معرّفان كما يلي :

R_1 = «سحبت كرة حمراء في المرة الأولى»

R_2 = «سحبت كرة حمراء في المرة الثانية»

واضح ان R_1 و R_2 مستقلان وذلك لأن حدوث احدهما لا يؤثر في احتمال حدوث الآخر .

فمثلاً

$$P(R_2) = \frac{7}{10}$$

ولا يعتمد هذا على لون الكرة التي سحبت في المرة الأولى .

أما اذا سحبنا كرتين بدون ارجاع (أي انه بعد سحب الكرة الأولى لا تعاد الى الكيس وتسحب الكرة الثانية من الكرات التسع الباقية في الكيس) ، فان R_1 و R_2 ليسا حدثين مستقلين وذلك لأن $P(R_2)$ تتأثر بكون الكرة الأولى حمراء أم لا . أي أن $P(R_2)$ تعتمد على ما اذا كان الحدث R_1 قد حدث أم لا . فاذا كانت الكرة الأولى حمراء فان احتمال اختيار كرة حمراء في المرة الثانية يساوي $\frac{6}{9}$. ولكن اذا كانت الكرة الأولى زرقاء فان احتمال كون الكرة الثانية حمراء هو $\frac{7}{9}$.

اذا كان الحدثان A و B مستقلين ، فاننا نعين دائماً احتمالاً للحدث الجديد $A \cap B$ حسب القاعدة التالية

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة

اذا كان الحدثان A و B مستقلين فان

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

هذه القاعدة تطبق ايضاً في حالة اكثر من حدثين مستقلين . فمثلاً اذا كانت A و B و C احداث مستقلة فان

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) . P(B) . P(C)$$

مثال «٨» :

سحبت كرتان مع الارجاع من كيس يحتوي على سبع كرات حمراء وثلاث كرات زرقاء .

(a) ما هو احتمال ان الكرتين لونهما احمر .

(b) ما هو احتمال ان الكرتين لونهما ازرق .

(c) ما هو احتمال ان الكرة الأولى حمراء وان الكرة الثانية زرقاء ؟

(d) ما هو احتمال ان الكرة الأولى زرقاء وان الكرة الثانية حمراء ؟

(e) ما هو احتمال ان الكرتين المسحوبتين بنفس اللون ؟

(الحل) :

بما اننا نسحب الكرتين مع الارجاع فان نتيجة السحبة الثانية مستقلة عن نتيجة السحبة الأولى ، واذا كان

R_1 = الكرة الأولى حمراء ، R_2 = الكرة الثانية حمراء

B_1 = الكرة الأولى زرقاء ، B_2 = الكرة الثانية زرقاء

فإن

$$(a)\ P(R_1 \cap R_2) = P(R_1).P(R_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

$$(b)\ P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

$$(c)\ P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)P(B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

$$(d)\ P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$$

(e) P(الكرتان نفس اللون) $= P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2)$

$$= \frac{49}{100} + \frac{9}{100} = \frac{58}{100}$$ ■

مثال «٩» :

وكالة بيع سيارات ابتليت بتسلمها سيارات فيها عيب في الدهان أو اطارات غير مناسبة . من الواضح ان نظامي الدهان واختبارات الاطارات مستقلان . فاذا كان احتمال وجود عيب في الدهان يساوي0.05 وان احتمال اختيار اطارات غير مناسبة هو 0.08 ، فما هو احتمال كون السيارة القادمة التي تسلم الى الوكالة فيها عيب في الدهان وذات اطارات غير مناسبة ؟

(الحل) :

لنعرّف الحدثينF وS كما يلي :

F = «في السيارة عيب في الدهان»

S = «اطارات السيارة غير مناسبة»

$$P(F \cap S) = P(F).P(S) = (0.05)(0.08) = 0.004$$

(١٠ - ٣) احتمالات ذات الحدين Binomial Probabilities :

هناك بعض التجارب التي لها نتيجتان ممكنتان فقط ، نجاح أو فشل . اذا كان احتمال النجاح في أية محاولة ثابتاً ، فيمكننا حساب ما يسمى باحتمال ذات الحدين .

إذا كان p = احتمال النجاح في كل محاولة و q = احتمال الفشل في كل محاولة ، فان

احتمال الحصول على نجاح في r من المرات خلال n من المحاولات المستقلة يرمز له بالرمز B (n,r) ويعطي حسب القاعدة .

$$B(n,r) = \left(\frac{n}{r}\right) p^r q^{n-r}$$

لاحظ أن

$$p + q = 1$$

وأن أس p يمثل عدد مرات الفشل . وأن أس q يمثل عدد مرات الفشل. لاحظ كذلك أن B (n,r) هو أحد الحدود في مفكوك .

$$(p + q)^n$$

وهذا هو سبب التسمية «احتمالات ذات الحدين» .

مثال «١٠» :

احسب احتمال الحصول على نجاح في ثلاث مرات خلال خمس محاولات اطلاق صاروخ اذا كان احتمال الحصول على نجاح في اطلاق الصاروخ في أي من المحاولات يساوي $\frac{2}{3}$ ؟

(الحل) :

عندنا في هذا المثال

$$n = 5, r = 3, p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$$

(لاحظ ان $q = 1 - p$)

احتمال الحصول على نجاح في ثلاث مرات خلال خمس محاولات هو

$$B(5,3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5!}{3!\ 2!} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{80}{243}$$

$B(5,3) = 0.329$ تقريباً

مثال «١١» :

يأخذ طالب امتحاناً فيه عشرة اسئلة ويخمن الاجابة في كل من الاسئلة . افرض ان احتمال تخمين اجابة صحيحة للسؤال يساوي 0.2 لكل سؤال (أي أن هناك خمسة اختيارات لكل سؤال ، واحتمال ان تكون الاجابة صحيحة $= \frac{1}{5} = 0.2$) . احسب احتمال حصول الطالب على تسع اجابات صحيحة على الأقل .

(الحل) :

في هذه الحالة

$n = 10, p = 0.2\ q = 0.8$

نرغب في ايجاد احتماد ان تكون تسع اجابات صحيحة أو عشر اجابات صحيحة أي أن $r = q$ أو $r = 10$ على التوالي .

(10 إجابات صحيحة) p + (9 إجابات صحيحة) p = (على الأقل 9 إجابات صحيحة) p.

$$= B(10,9) + B(10,10)$$

$$= \binom{10}{9}(0.2)^9(0.8)^1 + \binom{10}{10}(0.2)^{10}(0.8)^0$$

$= 0.000004096 + 0.0000001024$

$= 0.0000041984$

وحيث ان هذا الاحتمال صغير جداً ، فان على الطالب مراجعة دروسه والاستعداد للامتحانات القادمة .

تمارين :

في التمارين من 1 الى 7 اذكر نتائج فراغ العينة S للاحداث التالية .

1 . القاء قطعتي نقود مرة واحدة .

2 . القاء عملة معدنية وزهرة نرد في نفس الوقت .

3 . تصويب مسدس على هدف .

4 . التقاط شارة بطريقة عشوائية وملاحظة لونها من صندوق يشتمل على شارات حمراء وزرقاء وخضراء وبرتقالية اللون .

5 . اختيار ثلاث قطع من انتاج مصنع وملاحظة ما اذا كانت القطعة معيبة ام لا . (اجعل D تمثل المعيب و N تمثل غير المعيب) .

6 . اختيار واحد من الأرقام 1,2,3 بطريقة عشوائية ثم القاء قطعة نقود ثم القاء زهرة نرد .

7 . القاء ثلاث زهرات نرد (قدّر عدد النتائج ثم أذكر اي 10 منها) .

8 . في التمرين الثاني اذكر النتائج لو ان الحدث A يمثل الارقام الزوجية على الزهرة .

9 . في التمرين الخامس اذكر النتائج في الأحداث لو ان الحدث A يمثل وحدتين معيبتين بالضبط و B تمثل وحدتين معيبتين على الأقل .

10 . في التمرين السابع اذكر النتائج في الحدث .

(أ) A = «الزهرات الثلاث تظهر نفس العدد» .

(ب) B = «زهرتين بالضبط في الثلاث زهرات تظهر الرقم 6» .

(جـ) C = «جميع الزهرات الثلاث تظهر العدد 6» .

11 . في التمرين الثامن احسب $P(A)$.

12 . في التمرين 10 احسب $P(C)$ و $P(B)$ و $P(A)$.

13 . افترض اننا القينا زوج من زهر النرد مرة واحدة ، احسب احتمال الحدث A = « واحدة على الاقل من الزهرتين سيظهر عليها الرقم 6 » .

14 . افترض اننا القينا ثلاث زهرات نرد مرة واحدة ، احسب احتمال الحدث A = «على الأقل واحدة من الزهرات سيظهر عليها الرقم 6 » . (ملحوظة : احسب $P(\overline{A})$) .

15 . صندوق يحتوي على 8 شرائط حمراء وشريطتين زرقاء ، تم اختيار شريطتين على التوالي مع الاعادة .

(أ) اذكر الاربع نتائج في فراغ العينة S .

(ب) احسب احتمال كل نتيجة من النتائج الاربعة في فراغ العينة S .

(جـ) احسب احتمال ان الشريطتين المختارتين لهما نفس اللون .

16 . في التمرين الخامس افترض ان احتمال ان العملية الانتاجية في المصنع ستنتج وحدة تالفة هو 0.1 . احسب احتمال الأحداث .

(أ) A = «اختيار وحدتين تالفتين بالضبط» .

(ب) B = «اختيار وحدتين تالفتين على الأقل» .

17 . صندوق يحتوي على 6 قطع عملات ذهبية وقطعتين فضيتين . تم اختيار عملتين على التوالي مع الاعادة .

(أ) اذكر الأربع نتائج في فراغ العينة S .

(ب) احسب احتمال كل نتيجة من النتائج الأربع في فراغ العينة S .

(جـ) احسب احتمال ان العملتين المختارتين لهما نفس اللون .

18 . صاحب معرض سيارات صدم بسيارات جديدة متأخرة عن موعد الوصول ، توجد عيوب في دهانها ، واطاراتها أقل درجة مما يجب ان تكون عليه . افترض ان هذه الأحداث الثلاثة مستقلة وافترض ان احتمال تأخر الوصول هو0.5 واحتمال وجود عيوب في الدهان هو0.02 واحتمال ان الاطارات تكون اصغر درجة هو 0.01 . احسب احتمال ان السيارة التالية ستصل متأخرة بعيوب في دهانها واطاراتها أقل درجة مما يجب ان تكون عليه .

19 . احسب احتمال الحصول على محاولتين ناجحتين بالضبط في عملية اطلاق صاروخ من4 محاولات لو ان احتمال نجاح أي عملية اطلاق هو0.7 .

20 . احسب احتمال الحصول على 3 شعارات بالضبط عند القاء عملة معدنية متوازية 6 مرات .

21 . قناص قام بـ7 محاولات مستقلة في التصويب على هدف . افترض ان احتمال اصابة الهدف في أي شوط هو0.6 . احسب احتمال اصابة الهدف .

(أ)5 مرات بالضبط . (ب)6 مرات بالضبط .

(جـ)7 مرات بالضبط . (د)5 مرات على الأقل .

22 . لجنة من المراجعين الاحصائيين تتكون من الأعضاء : C,W,R,P,Q,M

(أ) ما هو عدد اللجان الفرعية المكوّنة من ثلاثة أعضاء والتي يمكن تكوينها بحيث ان تحتوي على العضوm .

(ب) ما هو عدد اللجان الفرعية المكونة من ثلاثة اعضاء والتي يمكن تكوينها اذا كان يجب على العضوينm,v ألا يكونا في نفس اللجنة .

23 . بكم طريقة يمكن بها تبديل حروف الكلمة RESERVE

24 . بكم طريقة يمكن ان يكون هناك ثلاث فتيات وولدان لعائلة لديها5 اطفال .

الباب الحادي عشر
الاحصاء

إن مفاهيم الفئة وفراغ العينة والاحتمالات التي درست في الأبواب السابقة كلها مفاهيم مفيدة عند مناقشة الطرق الاحصائية والتحليل الاحصائي ، وإن نظرية الاحتمالات أساسية في التحليل الاحصائي . كما وأن العلاقة بين الفئة الجزئية والفئة الشاملة مشابهة للعلاقة بين العينة والمجتمع وهما المفهومان الاساسيان في موضوع الاحصاء .

ويهتم الاحصاء بصورة رئيسية بجمع وتنظيم ووصف وتحليل البيانات الاحصائية التي تشكل العينة أو الفئة الجزئية . وعلى أساس الخصائص المميزة للعينة يهتم الاحصاء باستنتاج الخصائص المميزة للمجتمع أو الفئة الشاملة . وسوف ندرس في هذا الباب الخصائص المميزة الأكثر شيوعاً للعينة والمجتمع .

سوف ندرس أولاً كيفية تنظيم البيانات الاحصائية في توزيع تكراري . ثم ندرس طرق عرض هذه البيانات . وبعد ذلك ندرس كيفية وصف البيانات بقيمة مركزية واحدة تتوزّع حولها باقي القيم وتسمى مثل هذه القيمة «مقاييس النزعة المركزية» . وتشمل هذه المقاييس الوسط الحسابي والوسيط والمنوال وغيرها . ويشار الى هذه المقاييس عادة بكلمة متوسطات .

(١١ ـ ١) تكوين الجدول التكراري :

اذا أراد باحث دراسة عدد الأطفال لكل عائلة فيأخذ عينة مكوّنة من خمسين عائلة ويسجل عدد الأطفالx لكل من تلك العائلات . فالعدد الذي يسجل لكل عائلة يمكن ان يكون أحد الأعداد 0,1,2,.......,n

يسمى المتغيرx في مثل هذه الحالة متغيراً عشوائياً منفصلاً (Discrete Random Variable) . ويسمى المتغيرx «منفصلاً» لأن فئة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغيرx فئة محدودة(Finite) . أفرض ان القيم الخمسين للمتغيرx كانت كما يلي :

0 , 2 , 2 , 3 , 5 , 0 , 0 , 2 , 2 , 4   3 , 1 , 0 , 2 , 4 , 0 , 1 , 3 , 0 , 2

1 , 3 , 1 , 0 , 2 , 0 , 2 , 0 , 5 , 2   2 , 0 , 0 , 1 , 3 , 3 , 1 , 2 , 0 , 1

4 , 5 , 1 , 0 , 2 , 2 , 1 , 1 , 0 , 0

الشكل(١)

وبالطبع تصعب الاستفادة من هذه البيانات وهي بهذه الصورة لأنها بيانات غير مبوبة . ولجعل هذه البيانات أكثر فائدة ، يمكن تلخيصها في جدول (مثل جدول(١) التالي) بحيث تسجل جميع النتائج المتميزة في العمود الأول وتسجل تكرارات كل نتيجة منها في العمود الثاني وذلك بوضع شارطة رأسية لتمثل كل تكرار من هذه التكرارات ثم تجميعها في حزم تتكوّن كل منها من خمس تكرارات لسهولة معرفة عدد تكرارات كل نتيجة على حده .

الجدول التكراري لعدد اطفال خمسين عائلة

(1) عدد الأطفال x	(2) العلامات	(3) التكرار FR (x)	التكرار النسبي $RF(x) = \frac{FR(x)}{n}$	التكرار المتجمع CF (x)	التكرار المتجمع النسبي $RCF(x) = \frac{CF(x)}{n}$
0	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15	0.30	15	0.30
1	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	0.20	25	0.50
2	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13	0.26	38	0.76
3	~~IIII~~ I	6	0.12	44	0.88
4	III	3	0.06	47	.94
5	III	3	0.06	50	1.00
المجموع		50	1.00		

الجدول (1)

وبعد الانتهاء من هذه العملية نجمع عدد المشاهدات في كل نتيجة وتكتب في عمود ثالث . فنرى مثلاً من الجدول أن عدد المرات التي سجلت فيها عائلة بطفلين كان 13 . ويسمى العدد 13 هنا تكرار (Frequency) مشاهدة عائلة بطفلين . ويعرف العمود الثالث الدالة FR (x) وهي دالة التوزيع التكراري (Frequency Distribution Function) ونطاقها فئة جميع النتائج الممكنة ، ومداها تكرار كل نتيجة . وعليه فان نطاق الدالة هو الفئة

$$\{0,1,2,3,4,5\}$$

وقيم الدالة هي

$$FR(0) = 15 \quad FR(1) = 10 \quad FR(2) = 13$$

$$FR(3) = 6 \quad FR(4) = 3 \quad FR(5) = 3$$

أي أن FR (x) تمثل تكرار النتيجة أو القيمة x .

وبالمثل RF (x) تمثل التكرار النسبي (Relative Frequency) للنتيجة x . والتكرار النسبي هو نسبة التكرار الى المجموع الكلي للمشاهدات . وبصورة عامة اذا كان المجموع الكلي للمشاهدات n فان التكرار النسبي

$$RF(x) = \frac{FR(x)}{n}$$

ويستعمل CF (x) للدلالة على التكرار المتجمع (Commulative Frequency) ويمثل مجموع التكرارات المناظرة لقيم لا تزيد عن x . فمثلا

$$CF(2) = 38$$

لأن عدد العائلات التي لها طفلان أو أقل هو 38 ، حيث ان عدد العائلات التي لها طفلان هو 13 والتي لها طفل واحد هو 10 ، والتي ليس لها أي طفل هو 15 . ومجموع هذه التكرارات هو

$$13 + 10 + 15 = 38$$

بطريقة مماثلة لما سبق . التكرار المتجمع النسبي (Relative Commulative Frequency) RCF (x) للنتيجة x يمثل نسبة التكرار المتجمع الى العدد الكلي للمشاهدات أو عدد عناصر العينة . وبصورة عامة اذا كان العدد الكلى للمشاهدات n فان

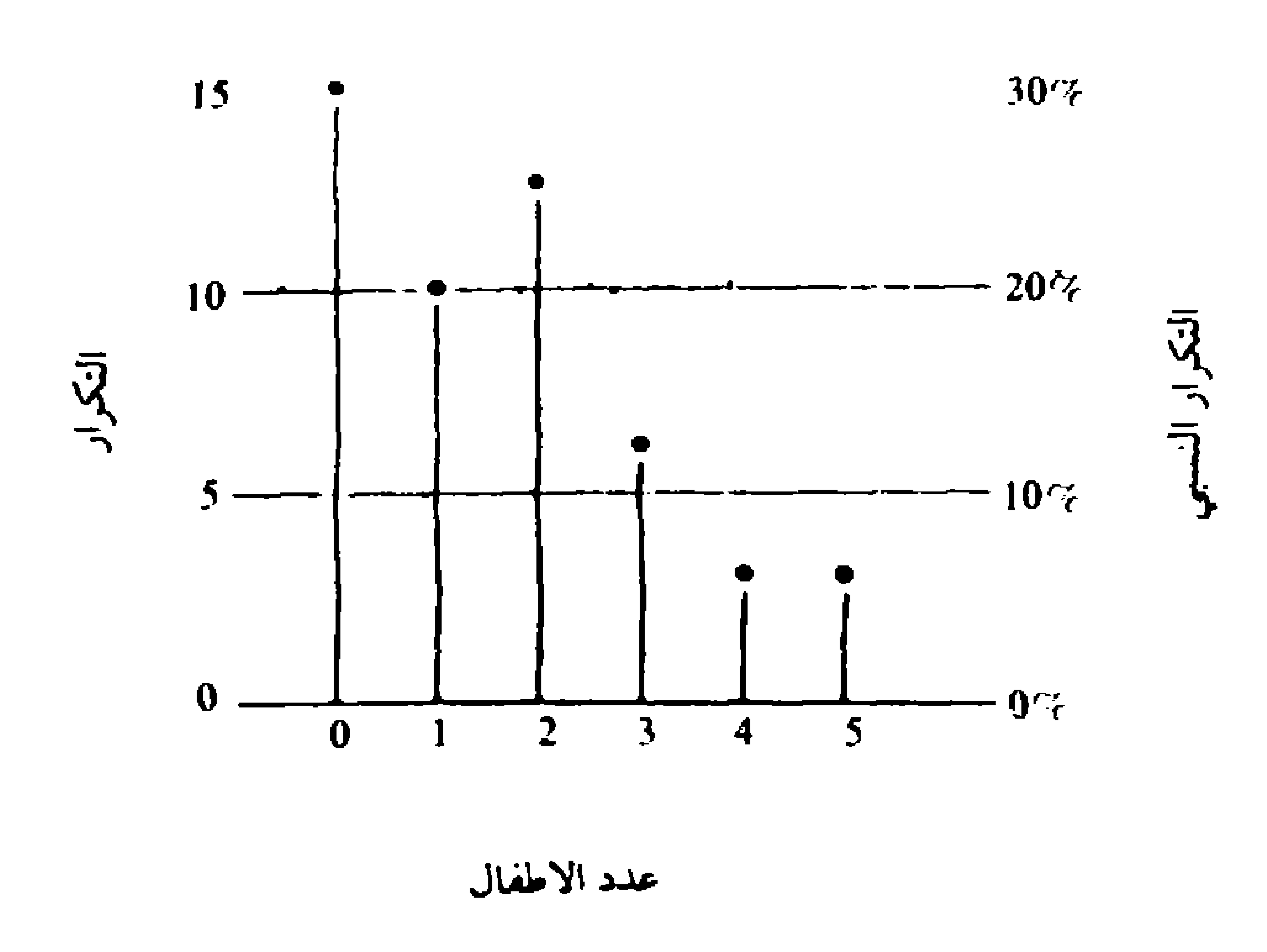
$$RCF(x) = \frac{CF(x)}{n}$$

كما هى الحالة في FR (x) . كل من التوزيعات الثلاثة الأخيرة دالة نطاقها فئة جميع النتائج الممكنه . فاذا أعطى أى من هذه التوزيعات الأربعة وحجم العينة (عدد عناصر العينة) فانه يمكن ايجاد التوزيعات الثلاثة الأخرى .

جميع هذه التوزيعات الأربعة مبينة في الجدول(1)

ويمثل شكل (2) التالى الرسمين البيانيين للتوزيع التكرارى والتوزيع التكرارى النسبى . لاحظ تطابق الرسمين ووجود محورين رأسيين بوحدات قياس مختلفه . أحدهما يمثل التكرارات النسبيه والآخر يمثل التكرارات الفعليه

الرسم البيانى للتوزيع التكرارى



عدد الاطفال

الشكل (2)

كمثال آخر لمتغير عشوائي من نوع آخر. نفرض أننا أخذنا عينة مكوّنة من 200 رجل وسجلنا أطوالهم. بما ان طول أي فرد يمكن ان يكون أي عدد مثل 64.328 بوصة. لذلك فان الطول x يعتبر متغيراً عشوائياً متصلاً أو مستمراً Continuous Random Variable فليس من المعقول ان نتكلم عن تكرار قيمة x لأنه ليس من المتوقع ان نشاهد رجلاً ثانياً طوله يساوي بالضبط 64.328 بوصة. ولكن بدلاً من استخدام تكرار الأطوال لكل قيمة ممكنه للمتغير x. نسجل تكرار الأطوال في فئة Class أو خلية Cell (مثلاً من 58.5 الى 61.5) كما في الجدول(2)

التكرار والتكرار النسبي لطول 200 رجل

رقم الفئة	(1) حدود الفئات	(2) مراكز الفئات	(3) العلامات	(4) التكرار F (x)	(5) التكرار النسبي $RF(x) = \frac{F(x)}{n}$
1	58.5 –	60	||	2	.01
2	61.5 –	63	~~||||~~ ~~||||~~	10	.05
3	64.5 –	66	•	48	.24
4	67.5 –	69	•	64	.32
5	70.5 –	72	•	56	.28
6	73.5 –	75		16	.08
7	76.5 – 79.5	78	||||	4	.02

الجدول(2)

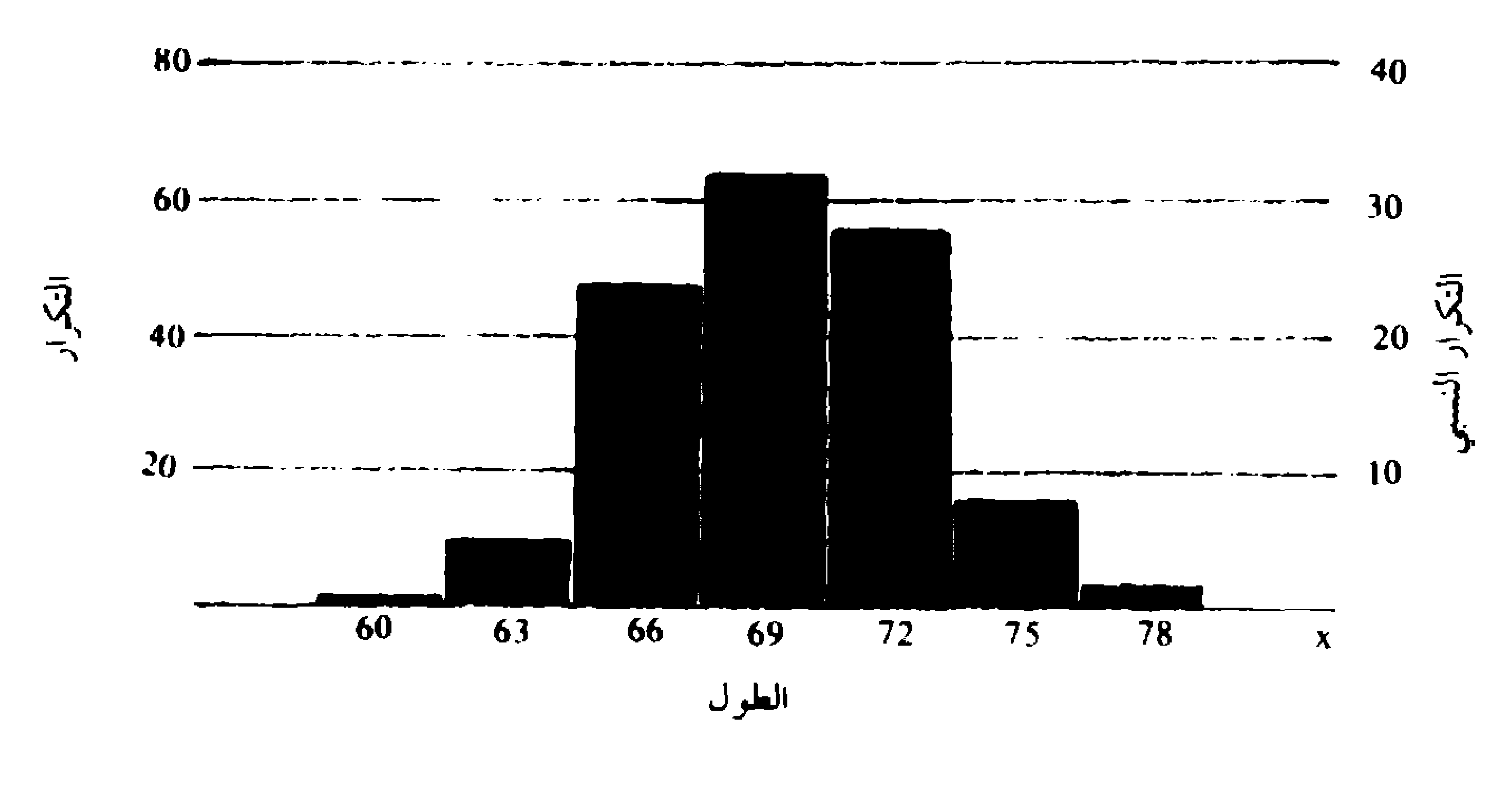
اخترنا الفئات وفي ذهننا القواعد التالية للاسترشاد بها.

١ ـ ألاّ يكون عدد الفئات كبيراً فتكون التفاصيل كثيرة وألاّ يكون صغيراً فنفقد الكثير من المعلومات. وقد يكون مناسباً استخدام من 5 فئات الى 15 فئة.

٢ ـ مراكز الفئات (النقاط الواقعة في منتصف الفئة) عادة تمثل جميع القراءات في

تلك الفئة ومن المناسب ان يكون المركز عدداً صحيحاً .

ويبينّ شكل(3) التالي الرسم البياني لفئات وتكرارات جدول(2) السابق . وفي هذا الرسم يستخدم مستطيل « Bar » بدلا من خطوط رأسية لتمثيل التكرارات لتذكرنا ان القراءات حدثت خلال الفترة كلها لا في المنتصف فقط . ويسمى أي رسم بياني من هذا النوع بالمدرج التكراري « Bar Diagram or a Histogram » .



شكل(3)

(١١ ـ ٢) الوسط الحسابي (Arithmetic Mean) :

ربما يكون الوسط الحسابي اكثر المتوسطات استعمالاً وذلك لسهولة حسابه ولاستعمالاته الكثيرة . ويعرف الوسط الحسابي بانه مجموع قيم فئة المشاهدات مقسوماً على عدد المشاهدات . فاذا كانت قيم المشاهدات

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

واذا كان $\bar{x}$ يرمز الى الوسط الحسابي لها فان

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال «١» :

أوجد الوسط الحسابي للعينة التالية المكوّنة من 11 مشاهدة

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	1	2	2	2	3	4	5	5	9	10

الحل :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{11} = \frac{1+1+2+2+2+3+4+5+5+9+10}{11}$$

$$= \frac{44}{11} = 4$$

أما اذا كانت البيانات منفصلة ومنظمة في جدول تكراري فنضرب كل قيمة في تكرارها ثم نجمع حواصل الضرب ويقسم بعد ذلك المجموع على العدد الكلي لمشاهدات العينة .

نعود الآن مرة أخرى الى المثال الأخير . بالرغم من أن عدد المشاهدات 11 ولدينا 11 قيمة لـ x . ولكن هناك سبع قيم متميزة فقط .

تظهر القيمة 1 مرتين و 2 تظهر ثلاث مرات و 5 تظهر مرتين وبقية القيم تظهر مرة

واحدة فقط . وعليه فان باستطاعتنا حساب الوسط الحسابي لهذه العينة بضرب كل قيمة (متميزة) بعدد مرات ظهورها ، ثم جمع حواصل الضرب هذه وقسمة مجموع حواصل الضرب على11 . وعليه نحصل على

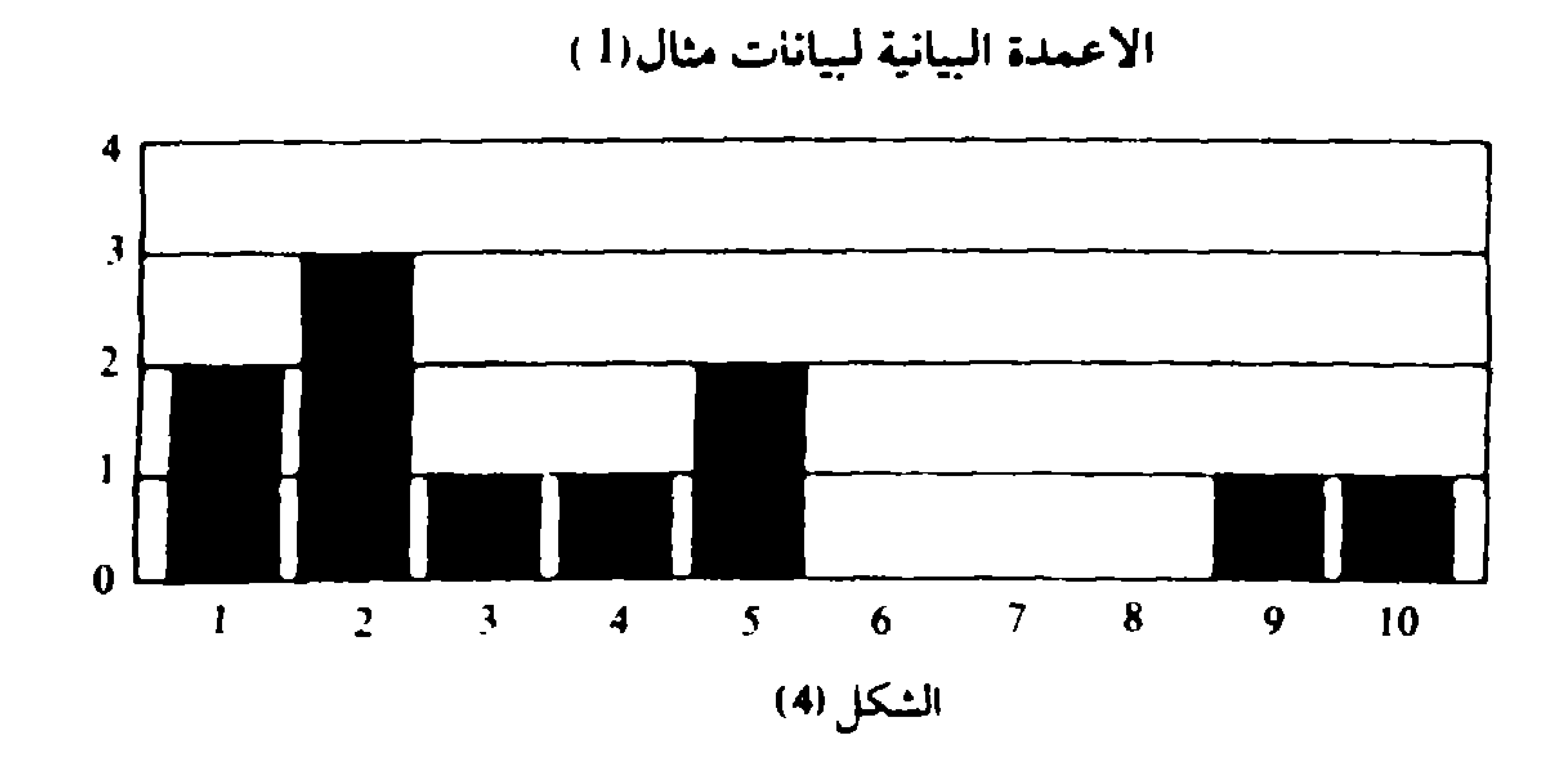
$$\bar{x} = \frac{1(2) + 2(3) + 3(1) + 4(1) + 5(2) + 9(1) + 10(1)}{11} = \frac{44}{11} = 4$$

الأعداد التي ليست داخل أقواس تمثل القيم المتميزة ، والأعداد داخل الأقواس تمثل تكرار القيم المتميزة . فاذا استعملناx للقيم المتميزة و $FR(x)$ لتكرارx ، فان الوسط الحسابي $\bar{x}$ للعينة يمكن حسابه حسب القاعدة التالية

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j \, FR(x_j)}{n}$$

هذه القاعدة مهمة جداً لحساب الوسط الحسابي لعينة مبوبة في جدول تكراري وخاصة اذا كانت قيم مشاهدات العينة مبوبة في فئات . ففي هذه الحالة لا بد من استخدام هذه القاعدة لحساب الوسط الحسابي . وتعتبر متصفات الفئات (أو ما تسمى بمراكز الفئات) القيم المتميزة لغرض حساب الوسط الحسابي .

الاعمدة البيانية لبيانات مثال(1)



الشكل (4)

ويعتبر مركز كل فئة ممثلاً لجميع القيم في تلك الفئة وذلك بافتراض ان قيم كل فئة تتوزّع بانتظام داخل الفئة .

مثال «٢» :

يمكن ايجاد الوسط الحسابي لعينة من خمسين عاملاً كما هو في الجدول التالي :

	x_j	$FR(x_j)$	$x_jFR(x_j)$
50.5 –	52	1	52
53.5 –	55	2	110
56.5 –	58	6	348
59.5 –	61	11	671
62.5 –	64	16	1.024
65.5 –	67	9	603
68.5 –	70	4	280
71.5 – 74.5	73	1	73
		50	3.161

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j \, FR(x_j)}{n} = \frac{3.161}{50} = 63.22$$

الجدول(3)

ويجب على القارىء ملاحظة انه ليس من الضروري أن يكون الوسط الحسابي لبيانات مبوّبة في فئات مساوياً للوسط الحسابي لنفس البيانات قبل تبويبها . ولكن اختيار اطوال وحدود الفئات قد يؤدي الى الحصول على نفس الوسط الحسابي بالطريقتين (قبل التبويب وبعده) كما يتضّح من المثال التالي :

مثال «٣» :

أوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية

8 , 11 , 13 , 15 , 17 ,

18 , 21 , 21 , 23 , 25 ,

25 , 25 , 26 , 29 , 30 ,

30 , 30 , 35 , 36 , 42 ,

الحل :

الوسط الحسابي لهذه العينة هو

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(8 + 11 + 13 + 15 + 17 + 18 + 21 + 21 + 23 + 25 + 25 + 25$$

$$+ 26 + 29 + 30 + 30 + 30 + 35 + 36 + 42) = \frac{480}{20} = 24$$

اذا نظمت هذه البيانات في الجدول التكراري التالي :

عدد الفئات	مراكز الفئات	التكرار
7.5 –	10	2
12.5 –	15	3
17.5 –	20	3
22.5 –	25	5
27.5 –	30	4
32.5 –	35	2
37.5 – 42.5	40	1
المجموع		20

الجدول(4)

فيمكن حساب الوسط الحسابي من هذا الجدول التكراري كما يلي : الجدول(5)

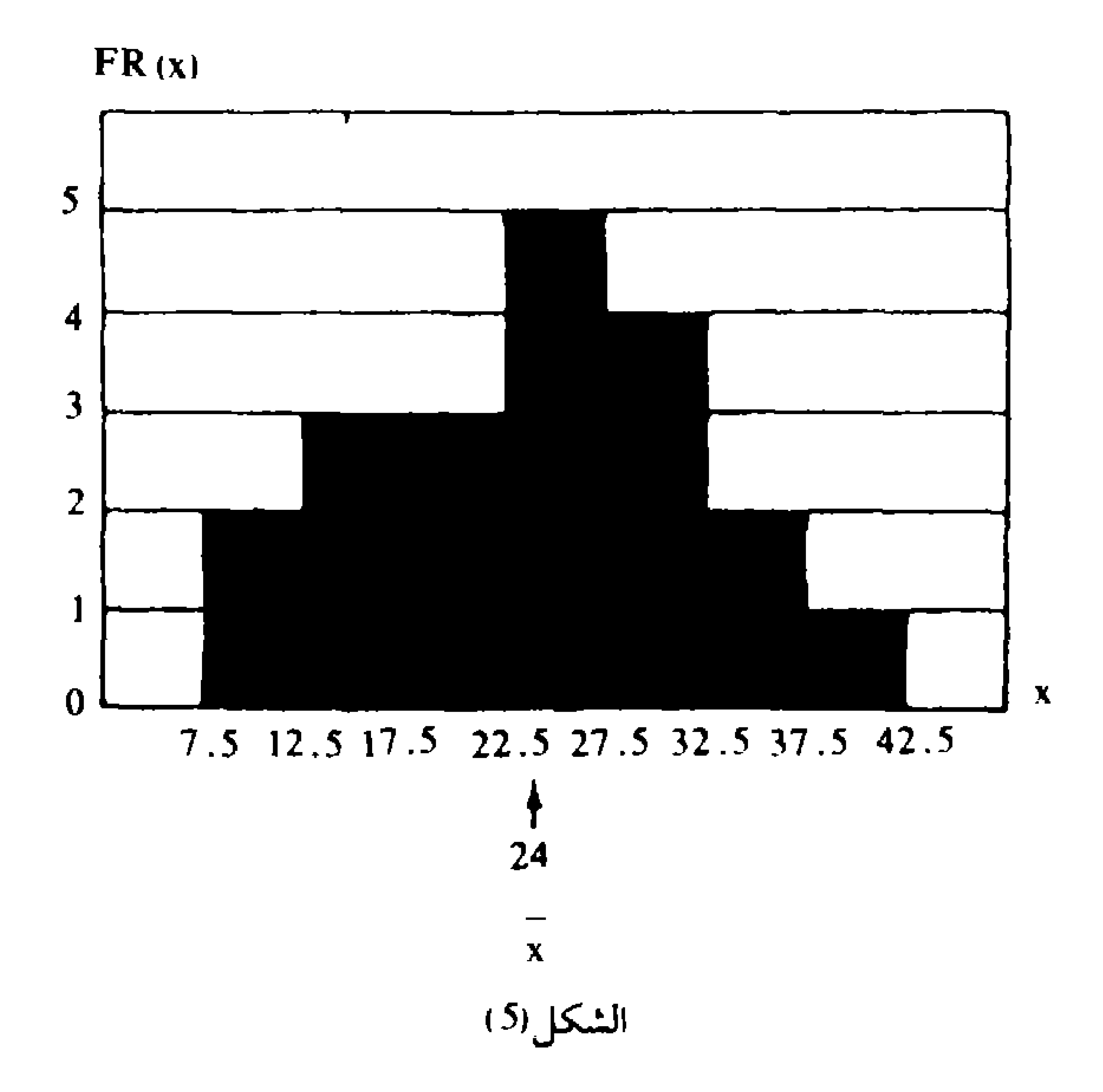
x	FR (x)	xFR (x)
10	2	20
15	3	45
20	3	60
25	5	125
30	4	120
35	2	70
40	1	40
Total	20	480

الجدول(5)

اذا الوسط الحسابي هو

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x\, FR(x)}{20} = \frac{480}{20} = 24$$

ويبينّ الشكل التالي المدرج التكراري المناظر لهذا الجدول



الشكل (5)

لاحظ اننا حصلنا على نفس قيمة الوسط الحسابي باستخدام الطريقتين . وهذا راجع أساساً الى كيفية اختيار الفئات . ويستطيع الطالب ان يختار فئات أخرى لتبويب هذه البيانات ليتأكد ان الحصول على نفس القيمة للوسط الحسابي هو أمر نادر الحدوث .

(١١ - ٣) خواص الوسط الحسابي :

اولاً : في أية عينة ، مجموع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي للعينة يساوي صفراً ، أي أن

$$\Sigma(x-\bar{x})=0$$

البرهان : اذا كانت قيم العينة

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

فان

$$\Sigma(x-\bar{x})=(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})$$

$$=(x_1+x_2\ x\ldots+x_n)-n\bar{x}$$

$$=n\bar{x}-n\bar{x}=0$$

مثال «٤» :

بيّن ان مجموع انحرافات القيم

1,3,5,9

عن وسطها الحسابي يساوي صفرا

الحل :

الوسط الحسابي هو

$$\bar{x}=\frac{1+3+5+7+9}{5}=5$$

إذاً

$$\Sigma(x-\bar{x})=(1-5)+(3-5)+(5-5)+(7-5)+(9-5)$$

$$=-4+(-2)+0+2+4=0$$

ثانياً : اذا كان كل من y . x متغيراً عشوائياً وكان كل من b . a عدداً ثابتاً

و

$$Y = a + bX$$

فان

$$\bar{Y} = a + b\bar{X}$$

البرهان :

بما ان

$$Y = a + bx$$

اذا

$$Y_1 = a + bX_1$$

$$Y_2 = a + bX_2$$

بالجمع نحصل على

$$Y_n = + bX_n$$

$$\Sigma Y = na + b \Sigma X$$

بالقسمة على n نحصل على

$$\frac{\sum y}{n} = \frac{na}{n} + \frac{b \sum x}{n}$$

أي أن

$$\bar{Y} = a + b\bar{X}$$

مثال «٥» :

نعلم من قياس درجة الحرارة ان درجة الحرارة (C) بالمقياس المئوي وبالمقياس الفهرنهايت (F) مرتبطتان حسب العلاقة التالية

$$F = 32 + \frac{9}{5} C$$

أي انه اذا كانت درجة الحرارة في مكان ما15 درجة مئوية فان درجة الحرارة المكافئة لها بالمقياس الفهرنهايتي هي

$$32 + \frac{9}{5}(15) = 39°F$$

واذا كان متوسط درجات الحرارة في القصيم خلال شهر ربيع الثاني بالمقياس المئوي 10 درجات (أي10 درجات مئوية) فان متوسط درجات الحرارة في القصيم خلال نفس الشهر بالمقياس الفهرنهايتي

$$32 + \frac{9}{5}(10) = 32 + 18 = 50°F$$

مثال «٦» :

افرض ان كلا من X ، Y متغير عشوائي وان

$$Y = 3 + 2X$$

وأخذX القيم

1,3,5,7,9

فيكون لدينا

X	Y = 3 + 2X
1	5
3	9
5	13
7	17
9	21
25	65
$\bar{X} = \frac{25}{5} = 5$	$\bar{Y} = \frac{65}{5} = 13$

الجدول(6)

ولكن يمكن حساب قيمة $\bar{y}$ مباشرة من العلاقة

$$Y = 3 + 2X$$

حيث

$$\bar{Y} = 3 + 2\bar{X}$$

$$= 3 + 2(5)$$

$$= 13$$

(١١ - ٤) الوسيط (Median) :

بالرغم من سهولة حساب الوسط الحسابي واستعمالاته الكثيرة ، فان هناك مقاييس أخرى للنزعة المركزية قد تكون أكثر مناسبة لاعتبارها مركزاً لبيانات العينة ، ومن هذه المقاييس ، الوسيط ، ويعرف الوسيط عادة كما يلي :

الوسيط هو القيمة الموجودة في منتصف البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

طريقة ايجاد الوسيط تعتمد على ما اذا كانت البيانات مبوبة في جدول تكراري أم لا .

فبالنسبة للبيانات غير المبوبة في جدول تكراري ينبغي ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً . واذا كان عدد البيانات n فردياً فان الوسيط هو قيمة المفردة التي رتبتها .

$$\frac{n+1}{2}$$

اما اذا كان عدد البيانات n زوجياً فمن المتفق عليه عادة ان يعتبر الوسيط مساوياً للوسط الحسابي للمفردتين الموجودتين في المنتصف .

مثال «١» :

كانت درجات 13 طالباً هي ما يلي :

10, 3, 10, 12, 9, 7, 9, 6, 7, 10, 8, 6, 7

(النهاية العظمى للدرجات 12 درجة) أوجد الوسيط لهذه الدرجات

الحل :

لنرتب الدرجات تصاعدياً كما يلي :

3, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 12

بما أن عدد الدرجات فردي (13) . اذا رتبة الوسيط هي

$$\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$$

أي أن الوسيط هو الدرجة التي تظهر في المرتبة السابعة وهي8 (الدرجة الواقعة في الوسط) . لاحظ ان ستا من الدرجات أصغر منها وستا أكبر منها .

مثال «٢» :

أوجد الوسيط للقيم العشر التالية

2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 10

الحل :

بما ان لدينا عشر قيم ، فالوسيط هو الوسط الحسابي للقيمة الخامسة والقيمة السادسة .

أي أن الوسيط هو

$$\frac{4 + 5}{2} = 4.5$$

لاحظ ان البيانات مرتبة تصاعدياً .

لايجاد الوسيط لبيانات مرتبة في جدول تكراري فان الطريقة تتطلب تكوين جدول توزيع تكراري متجمع صاعد أو جدول توزيع تكراري متجمع هابط . والطريقة مبنية على أساس أن جميع البيانات في كل فئة موزعة توزيعاً منتظماً داخل الفئة . نوضح هذه الطريقة في ايجاد الوسيط لأطوال العمال الخمسين وذلك كما هو مبين في الجدول التالي :

الجدول(7)

التكرار المتجمع النسبي RCF (x)	التكرار المتجمع CF (x)	التكرار FR (x)	مراكز الفئات x	الأطوال
0.02	1	1	52	50.5 –
0.06	3	2	55	53.5 –
0.18	9	6	58	56.5 –
0.40	20	11	61	59.5 –
0.72	36	16	64	62.5 –
0.90	45.	9	67	65.5 –
0.98	49	4	70	68.5 –
1.00	50	1	73	71.5 – 74.5
		50		المجموع

الخطوة الأولى في ايجاد الوسيط هي تحديد الفئة الوسيطية أي الفئة التي تحتوي على الوسيط . من الواضح ان الفئة62.5 الى أقل من65.5 هي الفئة التي تحتوي على الوسيط وذلك لأن القيم من القيمة الحادية والعشرين الى القيمة السادسة والثلاثين واقعة في هذه الفئة والقيمة الخامسة والعشرون (الوسيط) واقعة في هذه الفئة .

بعد تحديد الفئة التي يقع فيها الوسيط نقدّر قيمة الوسيط وذلك باستخدام القاعدة التالية

$$MD = L_m + \frac{\frac{n}{2} - CF(x_{m-1})}{FR(x_m)} w$$

حيث :

$CF(x_{m-1})$ = التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية (الفئة التي يقع فيه الوسيط) .

$FR(x_m)$ = تكرار الفئة الوسيطية .

w = طول الفئة الوسيطية .

L_m = الحد الأدنى للفئة الوسيطية .

$$MD = 62.5 + \left(\frac{\frac{50}{2} - 20}{16} \right) x\ 3 = 63.43$$

المثال التالي يوضح طريقة ايجاد الوسيط من بيانات معطاة في جدول تكراري .

مثال «٣» :

أوجد الوسيط للبيانات في الجدول التالي

الفئات	x	FR (x)	CF (x)
7.5 –	10	2	2
12.5 –	15	3	5
17.5 –	20	3	8
22.5 –	25	5	13
27.5 –	30	4	17
32.5 –	35	2	19
37.5 – 42.5	40	1	20
		20	

الجدول (8)

نرى ان الفئة الوسيطية هي التي مركزها 25 وذلك لأن المشاهدة التي مرتبتها n/2 (العاشرة) تقع في هذه الفئة . وعليه فان

$CF(x_{m-1}) = 8$ $\quad FR(x_m) = 5$

$w = 5$ $\quad L_m = 22.5$

اذا الوسيط هو

$$MD = 22.5 + \frac{\frac{20}{2} - 8}{5}(5) = 22.5 + \frac{10 - 8}{5}(5)$$

$$= 22.5 + 2 = 24.5$$

ان طريقة حساب الوسيط هذه مبنية على ما يلي : ان التكرار المتجمع حتى22.5 (الحد الأدنى للفئة الوسيطية) هو8 . وهذا يقع بمقدار مشاهدتين تحت المشاهدة العاشرة من المشاهدات العشرين . وبما ان تكرار الفئة الوسيطية هو5 . فاذا يجب ان نذهب

$$\frac{10 - 8}{5} = \frac{2}{5}$$

من طول الفئة الوسيطية للوصول الى الوسيط . ونعلم ان طول الفئة الـوسيطية

5

الفئة الوسيطية

22.5 23.5 24.5 25.5 26.5 27.5

الوسيط

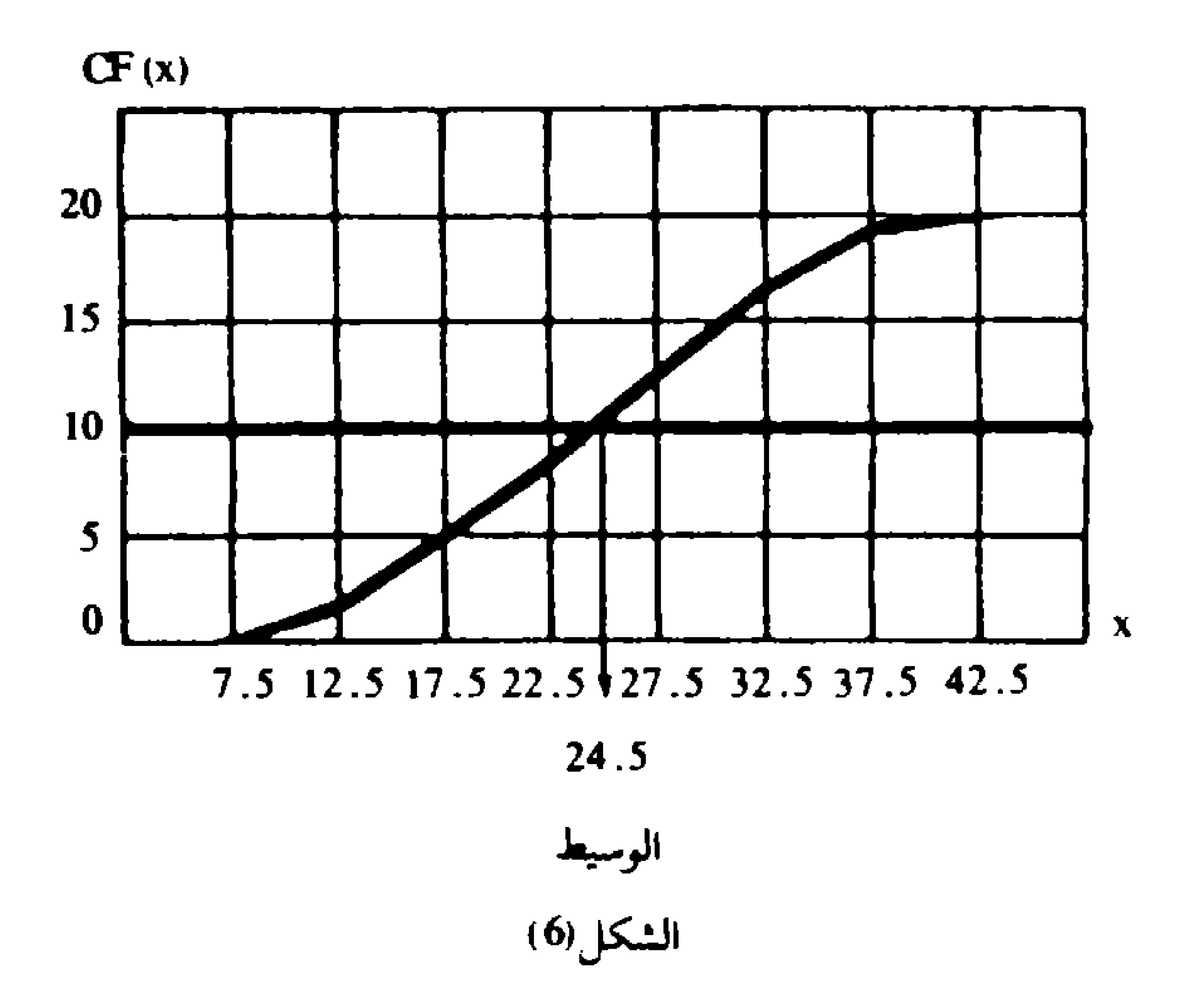
وعليه فيجب ان نضيف

$$\left(\frac{2}{5}\right)(5) = 2$$

الى الحد الأدنى للفئة الوسيطية للحصول على الوسيط . هذه هي كيفية الحصول على القيمة24.5 للوسيط (أنظر الى الشكل التوضيحي) .

بيانياً الوسيط مبينّ في الشكل(6) . برسم خط أفقي امام التكرار المتجمع10 (رتبة الوسيط) ، ومن نقطة تقاطع هذا الخط الأفقي مع الرسم البياني للتكرار المتجمع نرسم خطاً رأسياً . ونقطة تقاطع هذا الخط الرأس مع المحور الأفقي هي الوسيط .

الرسم البياني للتكرار المتجمع يبينّ موضع الوسيط .



الشكل(6)

(١١ ـ ٥) المنوال(Mode) :

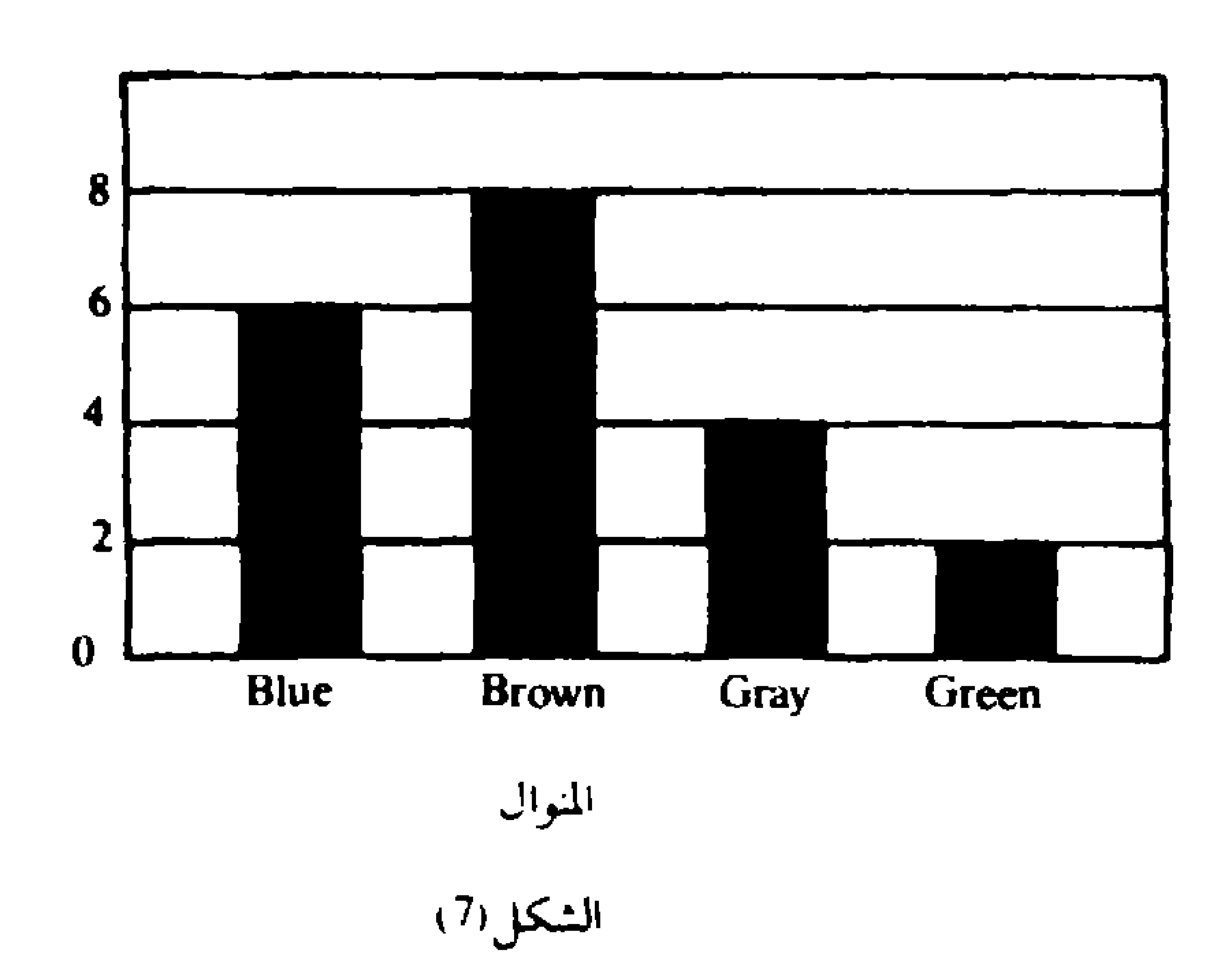
من مقاييس النزعة المركزية الأخرى المنوال . ويستخدم بصورة خاصة عندما تكون البيانات المجمعة على شكل صفات . ويعرف المنوال كما يلي

المنوال هو القيمة أو الصفة التي لها أكبر تكرار في مجموعة من المشاهدات .

لنفرض ان عشرين طالباً مصنّفون حسب لون العين كما يلي :

لون العين	أزرق	بني	غامق	أخضر
عدد الطلاب	6	8	4	2

فالعيون البنية هي المنوال لأنها أكثر تكراراً . يبين الشكل المنوال لتوزيع الطلاب العشرين حسب لون عيونهم .



المنوال

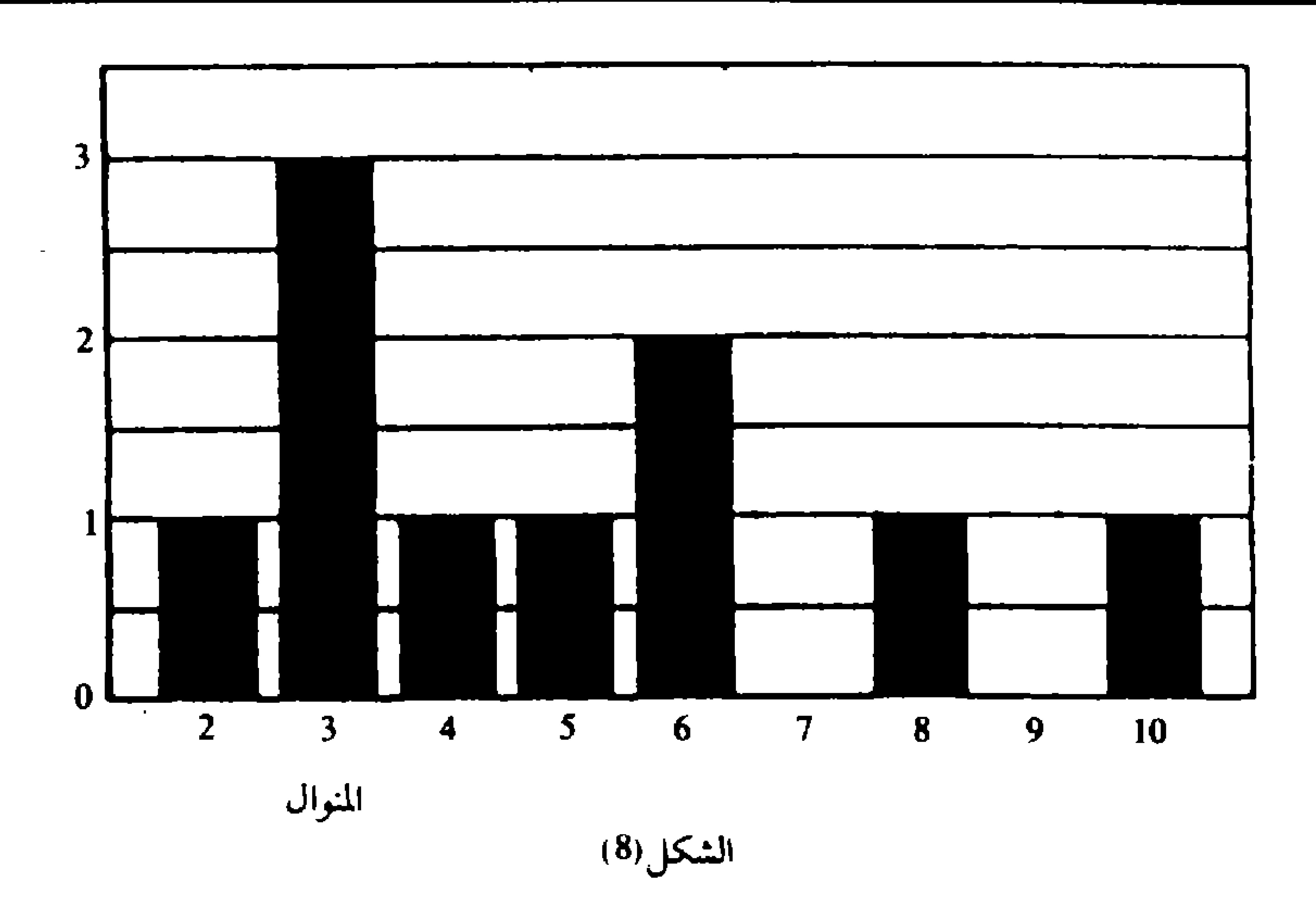
الشكل (7)

بالنسبة للقيم العشرة

2,3,3,3,4,5,6,6,8,10

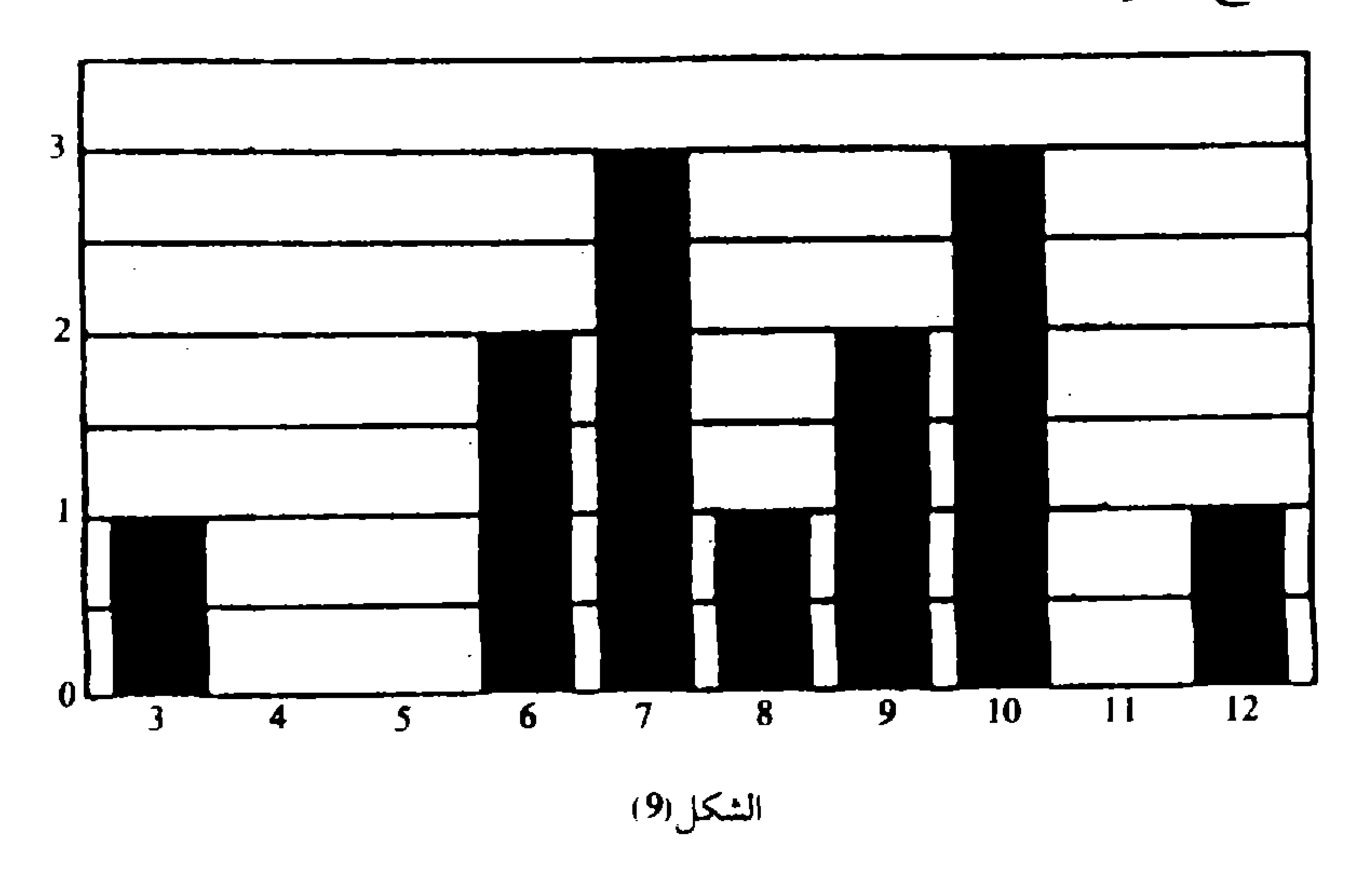
المنوال يساوي 3 لأنه أكثر تكراراً من القيم الأخرى

والشكل التالي يبينّ منوال هذه المشاهدات .



الشكل(8)

(توزيع ثنائي المنوال)



الشكل(9)

في بعض الأحيان نجد قيمتين أو صفتين متساويتين في التكرار وأكثر تكراراً من جميع القيم أو الصفات الأخرى . فمثلاً البيانات .

3 , 6 , 6 , 7 , 7 , 7 , 8 , 9 , 9 , 10 , 10 , 10 , 12

لها منوالان (أنظر شكل(9)) . نرى ان كلاً من القيمتين7 و10 ظهرت ثلاث مرات وهما أكثر تكراراً من جميع القيم الأخرى . في هذه الحالة ، نقول ان لدينا توزيعاً ثنائي المنوال .

تمارين :

يمكنك استخدام القوانين التالية

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x FR(x)}{n}$$

$$MD = L_m + \frac{\frac{n+1}{2} + CF(X_{m-1})}{FR(X_m)} \quad w$$

1 . حقق صحة

$$\Sigma(X - \bar{X}) = 0$$

باستخدام البيانات التالية

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
2	2	2	3	3	4	4	5	5	9

2 . احسب الوسط الحسابي والوسيط للدرجات

5 ، 3 ، 4 ، 6 ، 2 ، 9 ، 2 ، 4 ، 3 ، 8 ، 4 ، 6 ، 5 ، 7

3 . احسب الوسط الحسابي والوسيط

1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، 13 ، 15 ، 17 ، 19 ، 20 ، 22 ، 24 ، 26 ، 28

4 . نظمت المعدّلات التراكمية لأربعين طالباً في توزيع تكراري . الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري حيث x يمثل مركز كل فئة .

x	FR (x)
2.0	2
2.3	3
2.6	7
2.9	11
3.2	7
3.5	7
3.8	3
	40

احسب الوسط الحسابي والوسيط .

5 . الدخل اليومي بالريالات لخمسين عاملاً نظم في التوزيع التكراري التالي حيث x تمثل مركز كل فئة . احسب الوسط الحسابي والوسيط وأوجد الفئة المنوالية .

x	FR (x)
55	2
60	3
65	4
70	5
75	8
80	10
85	8
90	6
95	4
	50

6 . وزنت عشر حيوانات في مختبر وكانت أوزانها كالآتي :

12 , 20 , 28 , 14 , 26 , 20 , 19 , 21 , 23 , 17

أوجد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للأوزان العشرة .

7 . أجر الساعة الواحدة بالريالات لخمسين عاملا ميكانيكياً كانت كما يلي . استخدم الآلة الحاسبة لحساب الوسط الحسابي للأجور اليومية .

20	21	21	22	22	22	22	23	23	24
20	21	21	22	22	22	23	23	23	24
21	21	21	22	22	22	23	23	23	24
21	21	22	22	22	22	23	23	24	24
21	21	22	22	22	22	23	23	24	25

(اعتبر اليوم الواحد =8 ساعات عمل)

8 . الدخل اليومي لعمولات بيع الأسهم والسندات التي حصل عليها200 شخصاً نظم في التوزيع التكراري التالي . احسب الوسط الحسابي

77.5-	6
82.5-	12
87.5-	13
92.5-	22
97.5-	30
102.5-	35
107.5-	32
112.5-	20
117.5-	15
122.5-	10
127.5–132.5	6
	200

الباب الثاني عشر

النهايات والدوال المتصلة

يعرض هذا الباب مفهوم النهايات بصورة مبسّطة يسهل على القارىء استيعابها . ثم تستخدم النهايات في عرض وتوضيح مفهوم الدوال المتصلة (المستمرة) .

(١٢ - ١) مفهوم النهايات :

اعتبر الدالة

$$f(x) = 2x + 1$$

نسأل السؤالين التاليين :

(١) ما هي قيمة الدالة f عندما x تساوي 1 ؟

(٢) هل هناك عدد تقترب اليه قيمة الدالة F(x) عندما x تقترب من ، ولكنها لا تساوي 1 ؟

الاجابة على السؤال الأول بسيطة وهي $f(1) = 3$

للاجابة عن السؤال الثاني نحسب f(x) لعدة قيم لـ x قريبة من ، ولكنها لا تساوي 1 ، ونحاول ان نخمن العدد . الجدول التالي

x	f(x)
0.5	2
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
1.5	4
1.1	3.2
1.01	3.02
1.001	3.002

يبين لنا انه عندما x تقترب من ، ولكنها لا تساوي 1 ، سواء كان الاقتراب خلال قيم x التي هي أكبر من 1 أو خلال قيم x التي هي أقل من 1 ، فان قيمة f(x) تقترب من 3 . في الحقيقة عندما x تقترب من 1 فان 2x تقترب من 2 و $2x + 1$ تقترب من 3 . لنشير

الى هذه الحقيقة نقول ان «نهاية $2x + 1$ عندما x تقترب من 1 هي 3 » ، ويعبر عن هذا بالرموز .

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

أو أن

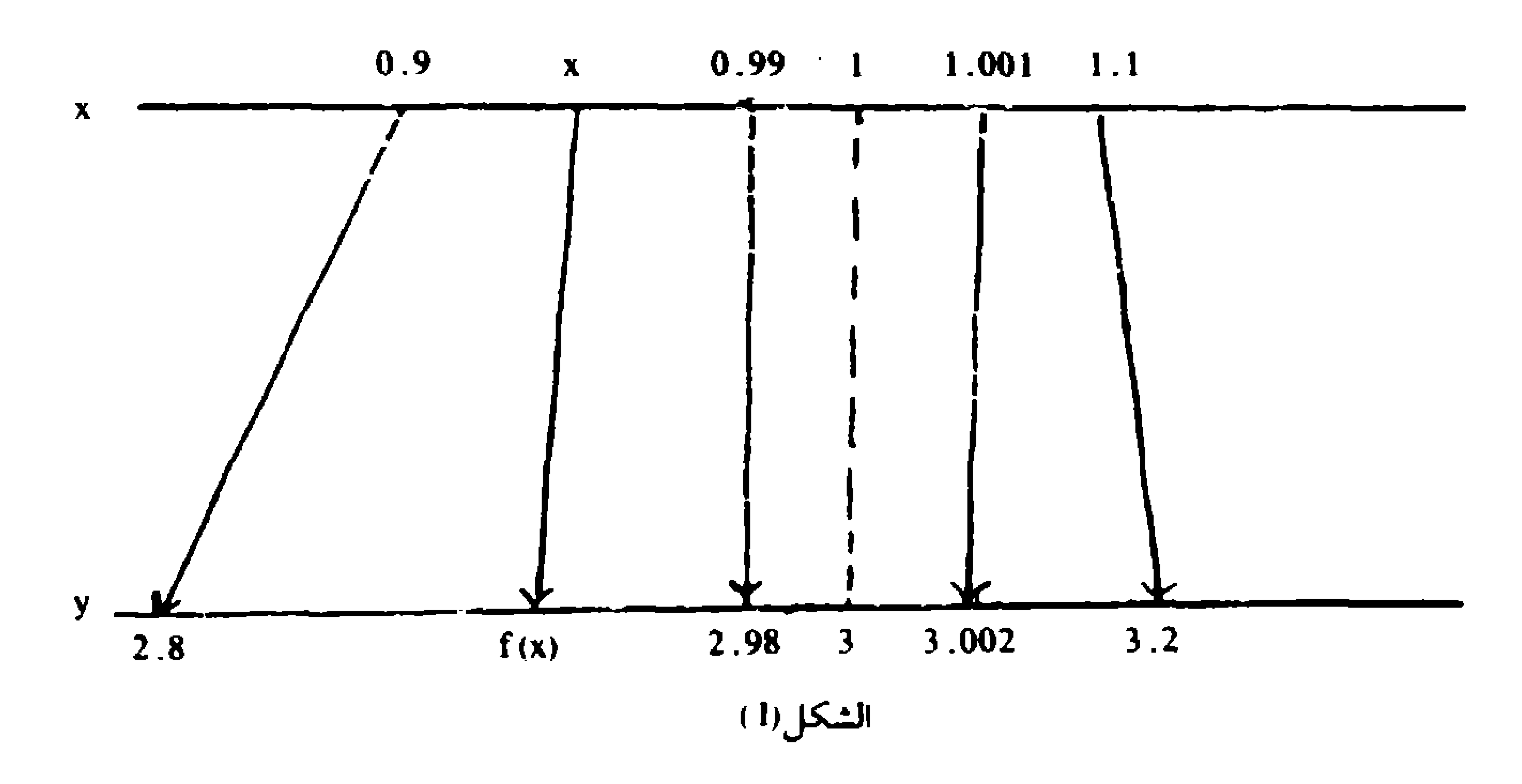
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

حيث

$$f(x) = 2x + 1$$

في الشكل (1) نجد رسماً للدالة بالقرب من $x = 1$. لاحظ تجمع نهايات الاسهم الصادرة من النقاط القريبة من $x = 1$ حول النقطة 3 . ويكتب هذا

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$



الشكل (1)

كمثال آخر لنجد قيمة

$$\lim_{x \to 3} x^2$$

وهذا يعني ان علينا ايجاد العدد ، اذا كان هناك أي عدد ، الذي تقترب اليه x^2 عندما x تقترب من ولكنها لا تساوي 3 ، سواء أكان الاقتراب خلال قيم x التي هي أكبر من 3 أو خلال قيم x التي هي أصغر من 3 . طبعاً عندما x تساوي 3 فإن قيمة x^2 تساوي

9 . وربما يكون هذا العدد هو الجواب على سؤالنا . ولكن بما أن هذا ليس صحيحاً لجميع الدوال فعلينا الرجوع الى تكوين الجدول لنحسب قيم x^2 لقيم x التي تقترب من 3 ولكنها لا تساوي 3 .

x	x^2
2.6	6.76
2.9	8.41
2.99	8.9401
2.997	8.982009
3.3	10.89
3.05	9.3025
3.01	9.0601
3.001	9.00060001

نرى من هذا الجدول أن قيمة x^2 تقترب من 9 عندما تقترب x من 3 . بالرغم من ان الدليل يشير الى ان

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

ولكننا لسنا متأكدين بالضبط من هذه النتيجة . فقد حسبنا قيمة x^2 لعدة قيم لـ x فقط . فربما لا تقترب قيمة x^2 من 9 عندما تقترب قيمة x من 3 بدرجة أقرب بكثير من القيم الموجودة بالجدول .

ولكن لنقل الآن . مع هذه التحفظات . أن

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

نفس التحفظات موجودة في الاستنتاج ان

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

لندرس الآن امثلة أخرى .

مثال «١» :

اذا كانت الدالة g معرّفة كما يلي :

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, x \neq 1 \\ 5, x = 1 \end{cases}$$

أوجد

$$\lim_{x \to 1} g(x)$$

الحل :

نلاحظ اولاً ان

$$g(1) = 5$$

ولكننا نذكّر القارىء ان لا علاقة لهذا بوجود أو عدم وجود نهاية الدالة . لايجاد $\lim_{x \to 1} g(x)$ ينبغي ان نحسب قيم $g(x)$ لقيم x التي تقترب من 1 ولكنها لا تساوي 1 . لكل

$$x \neq 1$$

قيمة الدالة $g(x)$ هي نفس قيم الدالة

$$f(x) = 2x + 1$$

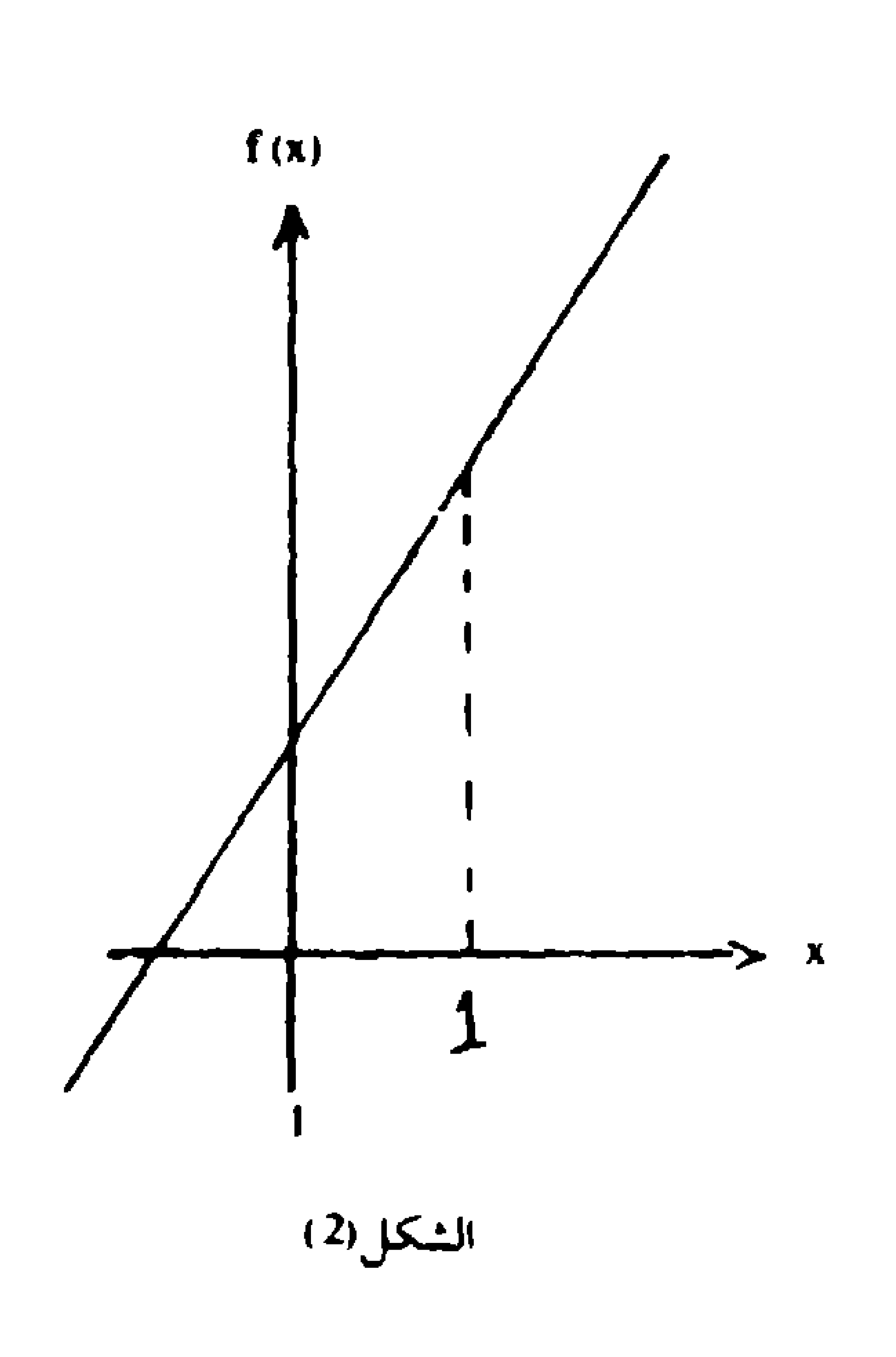
لذلك فان الجدول الذي كوناه للدالة $f(x)$ يمكن استخدامه كجدول للدالة $g(x)$ ، كذلك يمكن أن نقول أنه باقتراب x الى 1 ، 2x تقترب من 2 ، $2x + 1$ تقترب من 3 وعليه فاننا نشعر بديهياً أن باقتراب x إلى ١ ، الدالة $g(x)$ تقترب من 3 ، اذاً ، وبتحفظ فيما يتعلق بالتأكد المطلق من النتيجة ، يمكننا أن نقول أن $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$

في هذه الحالة

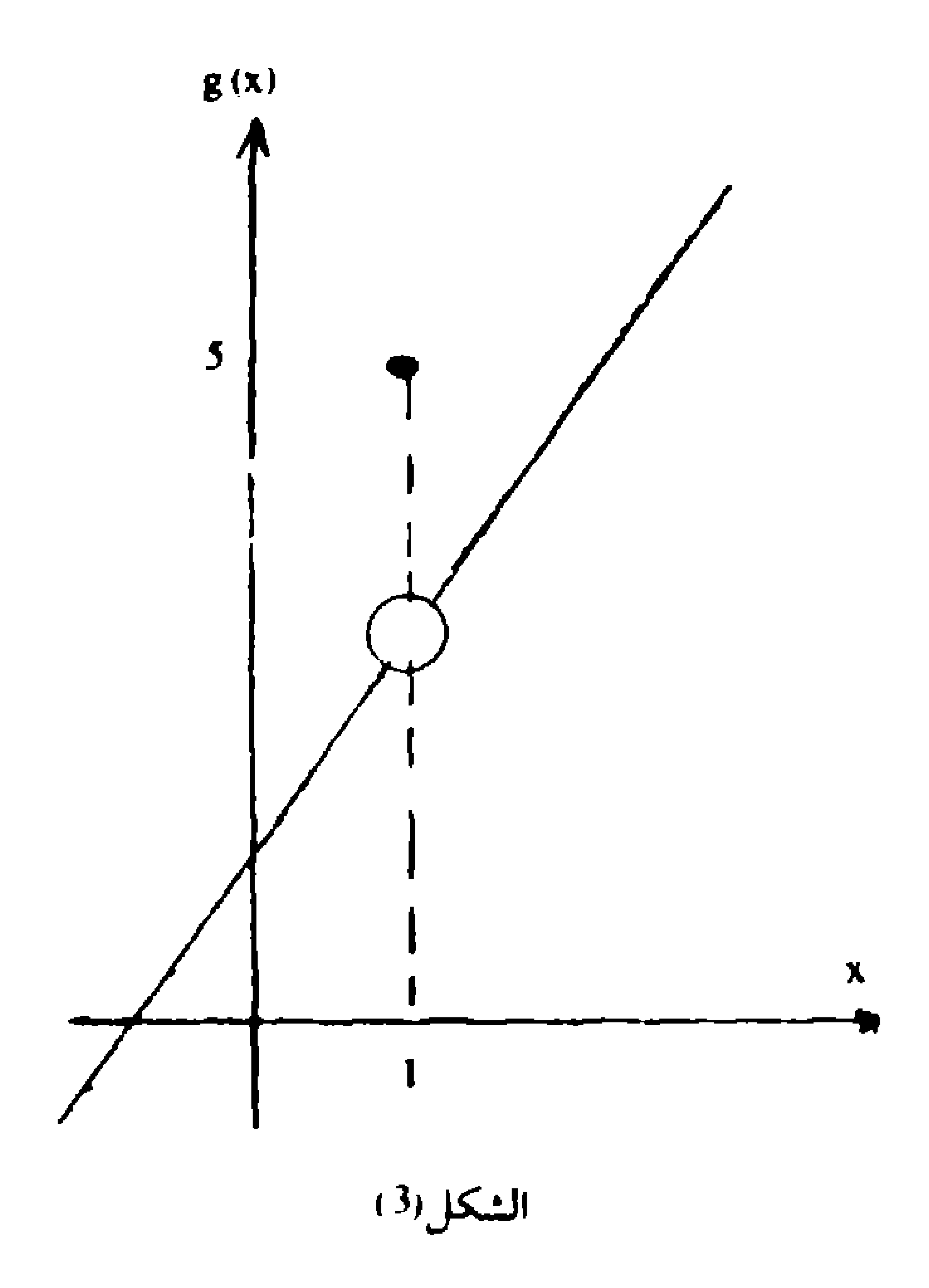
$$\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$$

إذاً للسؤالين (1) ، (2) أجوبة مختلفة . الرسم البياني للدالة g يشبه الرسم البياني للدالة f (الشكل (2)) . الفرق الوحيد هو ان النقطة (1,3) واقعة على رسم الدالة f بينما النقطة (1,5) تقع على رسم الدالة g . لاحظ ان اختلاف الدالتين في نقطة واحدة لا يؤثر

في قيمة النهاية . وهذا يبين ان قيمة نهاية الدالة عند نقطة معينة لا تعتمد على قيمة الدالة في تلك النقطة . الشكل(3) يمثل الرسم البياني للدالة g .



الشكل(2)



الشكل(3)

مثال «٢» :

اذا كانت الدالة h معرفة كما يلي :

$$h(x) = 2x + 1, x \neq 1$$

أوجد

$$\lim_{x \to 1} h(x)$$

الحل :

بما اننا عند ايجاد $\lim_{x \to 1} h(x)$ نهتم بقيم الدالة $h(x)$ بالقرب من وغير مساوية الى 1 فان حقيقة عدم تعريف الدالة في 1 لا تؤثر شيئاً في ايجاد هذه النهاية . هنا مرة اخرى يمكن استحدام نفس الجدول الذي استخدم في ايجاد $\lim_{x \to 1} f(x)$. فنقول بنفس الطريقة ان باقتراب x الى 1 , 2x تقترب من 2 و 1 + 2x تقترب من 3 وعليه فان

$$\lim_{x \to 1} h(x) = 3$$

الرسم البياني للدالة h يشبه الرسم البياني للدالة g باستثناء النقطة (1,5) . من الواضح ان تحريك هذه النقطة الى أعلى أو الى أسفل أو حتى ازالتها نهائياً لا يغير في قيم الدالة بالقرب من $x = 1$. فان قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة في تلك النقطة ، وقد تكون للنهاية قيمة حتى اذا لم تكن الدالة معرفة في تلك النقطة كما هي الحالة في هذا المثال .

مثال «٣» :

أوجد

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2}{1-2x}$$

الحل :

عندما x تقترب من -2 ، x^2 تقترب من 4 و $3x^2$ تقترب من 12 ، كذلك $2x$ تقترب من -4 اذا

$$\frac{3x^2}{1-2x}$$

تقترب من

$$\frac{12}{1-(-4)} = \frac{12}{5}$$

عندما تقترب x من -2 .

وعليه فان

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2}{1-2x} = \frac{12}{5}$$

(١٢ - ٢) نظريات في النهايات :

درسنا في القسم السابق مقدمة في مفهوم النهايات . دراسة هذه المادة دراسة دقيقة تحتاج الى معلومات أخرى ونضوجاً أكثر في الرياضيات والتي تعتبر فوق هذا المستوى . والطريقة التي استخدمت في الفصل السابق غير عملية لايجاد نهايات دوال معقدة . ولكن هناك بعض النظريات التي تساعدنا على ايجاد النهايات نذكر بعضها في هذا الباب بدون براهين .

نظرية «١» :

اذا كان كل من b, a, m عدداً حقيقياً فان

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

كحالة خاصة نجد ان ،

$$\lim_{x \to a} x = a$$

ولكل عدد ثابت k ،

$$\lim_{x \to a} k = k$$

النظرية التالية تساعد كثيراً في ايجاد قيم النهايات

نظرية «٢» :

اذا كانت كل من النهايتين

$$\lim_{x \to a} g(x) \, , \lim_{x \to a} f(x)$$

موجودة فان النهايات على يسار كل من الصيغ التالية موجودة وان

$$\text{(i)} \lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

اذا كان k عدد ثابت فإن

$$\text{(ii)} \lim_{x \to a} k\, f(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\text{(iii)} \lim_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right] \left[\lim_{x \to a} g(x) \right]$$

$$\text{(iv)} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

على شرط ان

$$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

يمكن استخدام الفقرة(iii) من هذه النظرية لاثبات النظرية التالية

نظرية «٣» :

اذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x \to a} [g(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} g(x) \right]^n$$

مثال «١» :

أوجد قيمة

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x + 5)$$

الحل :

من (i)

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x + 5) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 2x + \lim_{x \to 3} 5$$

$$= (\lim_{x \to 3} x)(\lim_{x \to 3} x) - 2 \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 5$$

$$= 3(3) - 2(3) + 5 = 8$$

مثال «٢» :

أوجد نهاية الدالة f عندما x تقترب من 1 ، حيث

$$f(x) = \frac{(x^7 - 5x)(x + 2)^2}{x^3 - 10}$$

الحل :

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^7 - 5x)(x+2)^2}{x^3 - 10} = \frac{\lim_{x \to a} (x^7 - 5x)(x+2)^2}{\lim_{x \to 1} (x^3 - 10)}$$

$$= \frac{[\lim_{x \to 1} (x^7 - 5x)]\,[\lim_{x \to 1} (x+2)^2]}{\lim_{x \to 1} (x^3 - 10)}$$

$$= \frac{[\lim_{x \to 1} x^7 - \lim_{x \to 1} 5x]\,[\lim_{x \to 1} (x+2)]^2}{\lim_{x \to 1} x^3 - \lim_{x \to 1} 10}$$

$$= \frac{[(\lim_{x \to 1} x)^7 - 5 \lim_{x \to 1} x]\,[\lim_{x \to 1} x + \lim 2]^2}{(\lim_{x \to 1} x)^3 - \lim_{x \to 1} 10}$$

$$= \frac{[1^7 - 5(1)]\,[1+2]^2}{1^3 - 10} = 4$$

كما هو واضح من هذه الأمثلة فان ايجاد نهاية دالة يمكن أن يحول الى ايجاد $\lim_{x \to a} x$ و $\lim_{x \to a} k$ وذلك باستخدام النظريات السابقة بصورة متكررة . الشرط في الفقرة (iv) من نظرية (2) بأن نهاية المقام لا تساوي صفراً شرط ضروري . ولكن هذا لا يعني ان قيمة الدالة $g(x)$ لا تساوي صفراً . فهناك فرق ، كما قلنا سابقاً ، بين قيمة الدالة في نقطة ما وبين قيمة نهاية الدالة في تلك النقطة . المثال التالي يبين عدم امكانية استخدام هذه النظرية لأن نهاية دالة المقام تساوي صفراً .

مثال «٣» :

أوجد

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6}$$

الحل :

بما ان

$$\lim_{x \to -2} (x^2 + 5x + 6) = 0$$

فلا يمكن استخدام الفقرة(iv) من النظرية(2) .

اذا لم تكن نهاية البسط صفراً فان الكسر يكبر عددياً (موجب أو سالب) عندما x تقترب من 2 − ، وفي هذه الحالة فان النهاية غير موجودة . ولكن بما ان نهاية البسط تساوي صفراً أيضاً فان هناك احتمالاً ان يكون للنهاية المطلوبة وجود.لدينا

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)} = \lim_{x \to -2} \frac{2}{x + 3}$$

في الدالة الأخيرة نهاية المقام لا تساوي صفراً . وعليه يمكن استخدام النظرية(2) لايجاد النهاية

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\lim_{x \to -2} (2)}{\lim_{x \to -2} (x + 3)} = \frac{2}{1} = 2$$

نظرية «٤» :

اذا كان a عدداً حقيقياً و r عدداً نسبياً (قياسياً) بحيث a^r معرف كعدد حقيقي فان

$$\lim_{x \to a} x^r = a^r$$

« ٥ » :

اذا كان a عدداً حقيقياً و r عدداً نسبياً (قياسياً) وكانت g دالة وان النهاية

$$\lim_{x \to a} g(x)$$

موجودة وان

$$\left[\lim_{x \to a} g(x) \right]^r$$

معرف كعدد حقيقي فان

$$\lim_{x \to a} g^r(x) = \left[\lim_{x \to a} g(x) \right]^r$$

مثال «٤» :

أوجد

$$\lim_{x \to 6} \sqrt{x^2 - 3x - 8}$$

الحل :

$$\lim_{x \to 6} \sqrt{x^2 - 3x - 8} = \lim_{x \to 6} (x^2 - 3x - 8)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\lim_{x \to 6} (x^2 - 3x - 8) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{10}$$

تمارين (١) :

1 . اعط مثالاً لدالة لها نهاية في $x = 0$ ولكنها غير معرّفة في $x = 0$

في المسائل من 2 إلى 26 أوجد قيمة النهاية

2. $\lim_{x \to 4} (1 - 3x)$.
3. $\lim_{x \to 2} x^3$.
4. $\lim_{t \to \sqrt{2}} (t^2 - 2)$
5. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x - 3}{x + 4}$
6. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$
7. $\lim_{u \to 4} \sqrt{u + 2}$.
8. If $f(x) = 6$, find $\lim_{x \to 3} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)$.
9. $\lim_{x \to 2} (-5)$.
10. $\lim_{x \to 3} (1 + 4x - x^2)$.
11. $\lim_{x \to 2} (y^3 - 10y - 8)$.
12. $\lim_{x \to -7} (s - 1)(s + 7)$.
13. $\lim_{x \to e} (3x + 1)$.
14. $\lim_{x \to 0} (x^2 + 4)(x - \dfrac{1}{2})$.
15. $\lim_{x \to a} (x^2 - a^2)$.
16. $\lim_{x \to a} (ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$.
17. $\lim_{z \to 0} \dfrac{3z + 2}{z^2 - 2z - 5}$
18. $\lim_{t \to 1/2} \dfrac{6 - 4t}{t + 1}$
19. $\lim_{x \to b} \left(\dfrac{x}{x - 4} + b \right)$.
20. $\lim_{x \to 13} \sqrt{x - 10}$.
21. $\lim_{u \to x} \sqrt{u^2 + 4u}$.
22. $\lim_{y \to 1} \sqrt{5 - 3y - y^2}$.
23. $\lim_{x \to -1} (3x + 1)\sqrt{x + 10}$.

24. $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x\sqrt{x+1}}$ 25. $\lim_{x \to 5} \left[x^3 \frac{\sqrt{2x-6}}{2(x+3)} + (x-1) \right]$. 26. $\lim_{u \to x} \frac{4-1}{u^3 - xu + b}$

في المسائل من 27 الى 37 أوجد النهاية اذا كانت النهاية موجودة . ثم ارسم الشكل الذي يمثل الدالة .

27. $f(x) = \begin{cases} -x+6, & x \leq 3, \\ x, & x > 3, \end{cases}$ $\lim_{x \to 3} f(x), \lim_{x \to 1} f(x)$.

28. $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x < -1, \\ x^2, & x \geq -1, \end{cases}$ $\lim_{x \to -1} f(x), \lim_{x \to 0} f(x)$.

29. $z(t) = \begin{cases} t^2, & t < 1, \\ -2t, & t \geq 1, \end{cases}$ $\lim_{t \to 1} g(t), \lim_{t \to 0} g(t)$.

30. $h(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2, \\ 8, & x > 2, \end{cases}$ $\lim_{x \to 2} h(x), \lim_{x \to 4} h(x)$.

31. $F(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$ $\lim_{x \to 2} F(x)$

32. $f(x) = \begin{cases} -x+6 & x < 3, \\ 1. & x = 3. \\ x, & x > 3, \end{cases}$ $\lim_{x \to 3} f(x)$.

33. $u(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{x} & x > 0, \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} u(x)$.

34. $\lim_{t \to 0} |t|$.

35. $\lim_{x \to 0} (x / |x|)$.

36. $\lim_{x \to 1} [x]$ $\lim_{x \to 3/2} [x]$ حيث $[x]$ هو اكبر عدد صحيح لا يزيد عن x

37. $\lim_{x \to 2} (x - [x])$.

في المسائل من 38 الى 55 أوجد قيمة النهاية

38. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

39. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

40. $\lim_{t \to -3} \frac{t^2 + 1}{(t + 3)^2}$

41. $\lim_{y \to -3} \frac{y + 3}{y^2 - 9}$

42. $\lim_{y \to 3} \frac{y + 3}{y^2 - 9}$

43. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x - 1)(x + 8)^2}$

44. $\lim_{x \to 1} \frac{m}{x - 1}$

45. $\lim_{s \to 2} \frac{1}{(s + 1)(s - 2)}$

46. $\lim_{x \to -5} \frac{1/x + 1}{x + 5}$

47. $\lim_{y \to c} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{c}}{y - c}$, $c > 0$.

48. $\lim_{u \to x} \frac{u^2 - 3u - x^2 + 3x}{u - x}$

49. $\lim_{z \to 4} \frac{z^2 + 3z - 4}{z - 4}$

50. $\lim_{x \to -3} \frac{(2x - 1)(x + 3)^2}{(x^2 - 9)(x^2 + 4x + 3)}$

51. $\lim_{t \to -3} \frac{1/(t + 2) + 1}{t + 3}$

52. $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7}$

53. $\lim_{x \to a} \frac{1}{x^2 - a^2}$

54. $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a}$

55. $\lim_{x \to a} \frac{x}{x^3 - a^3}$

في كل من المسائل 56 الى 61 استخدم الدوال $f(x)$ ، $g(x)$ المعطاة لايجاد النهايات المطلوبة

56. $f(x) = 5 + 3x - x^2$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ او $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

57. $h(x) = \frac{x}{x + 2}$, $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

59. $f(x) = x^2 - 3x$,

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$.

(c) $\lim\limits_{u \to x} \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}$, (d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

60. $f(x) = 1/x$,

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$, (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h}$,

(c) $\lim\limits_{u \to x} \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}$, (d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$,

61. $g(x) = \sqrt{x}$,

(a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{g(x) - g(6)}{x - 6}$, (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(6 + h) - g(6)}{h}$

(c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$, $a > 0$, (d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a + h) - g(a)}{h}$, $a > 0$.

(١٢ - ٣) الاتصال (Continuity) :

ندرس في هذا الفصل الدوال المتصلة أو الدوال المستمرة . درسنا سابقاً مفهوم نهاية الدالة ولاحظنا عدم اعتماد وجود نهاية الدالة على قيمة الدالة في نقطة معينة . ولقد بينا أن نهاية الدالة قد تكون موجودة حتى ولو كانت الدالة غير معرّفة في تلك النقطة . في هذا الفصل نرى الدور الذي تلعبه نهاية الدالة وقيمة الدالة في تحديد اتصال الدالة .

افرض ان أجور تذاكر شركات الطيران تعتمد على عمر المسافر . فاذا كان عمره لا يقل عن 12 سنة فانه يدفع أجراً كاملاً . اما اذا كان عمره أقل من 12 سنة ولا يقل عن سنتين فيدفع نصف الأجر الكامل . والطفل الذي لا يتراوح عمره السنتين يدفع (عفواً يدفع عنه) عشر الأجر الكامل . يمكن ان تمثل دالة الأجور بالرموز كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

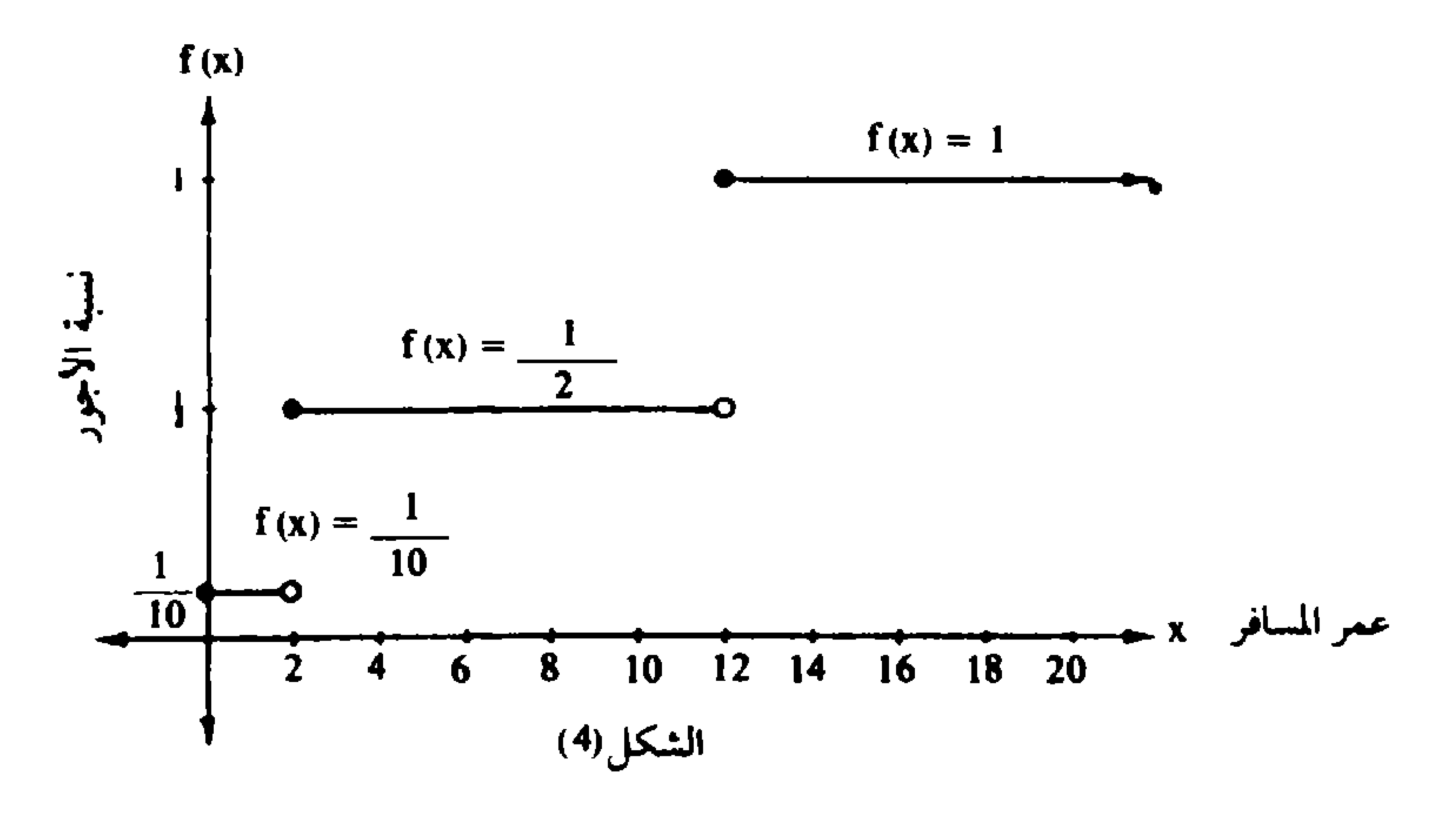
نجد الرسم البياني لهذه الدالة في شكل(4) . لاحظ ان الدالة تقترب الى $\frac{1}{10}$ عندما x تقترب من 2 من اليسار وتقترب الى $\frac{1}{2}$ عندما x تقترب الى 2 من اليمين . وعليه فاننا نستنتج ان

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{10} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

وعليه فان $\lim_{x \to 2} f(x)$

غير موجودة .

ونلاحظ من الشكل ان الرسم البياني ينقطع في $x = 2$ وكذا الحال في $x = 12$. رياضياً نقول ان الدالة غير متصلة (Discontinuous) في $x = 2$ و $x = 12$. ونقول بلغة مبسّطة غير دقيقة ان الدالة تكون متصلة (مستمرة) اذا كان بالامكان رسم الرسم البياني لها دون رفع القلم عن الورقة .



الشكل(4)

كمثال آخر لدالة غير متصلة ، اليك الدالة التالية

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad , x \neq 2$$

لاحظ أن الدالة غير معرّفة في2 . ولكن يمكن ايجاد نهاية الدالة كما يلي

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)$$

$$= 4$$

وعليه فان نهاية الدالة في2 موجودة وقيمتها تساوي4 . ولكن مع ذلك الدالة غير متصلة . ونلاحظ من الشكل(5) ان الرسم البياني ينقطع في2 والدالة غير معرّفة في2 . ولكننا اذا عرفنا

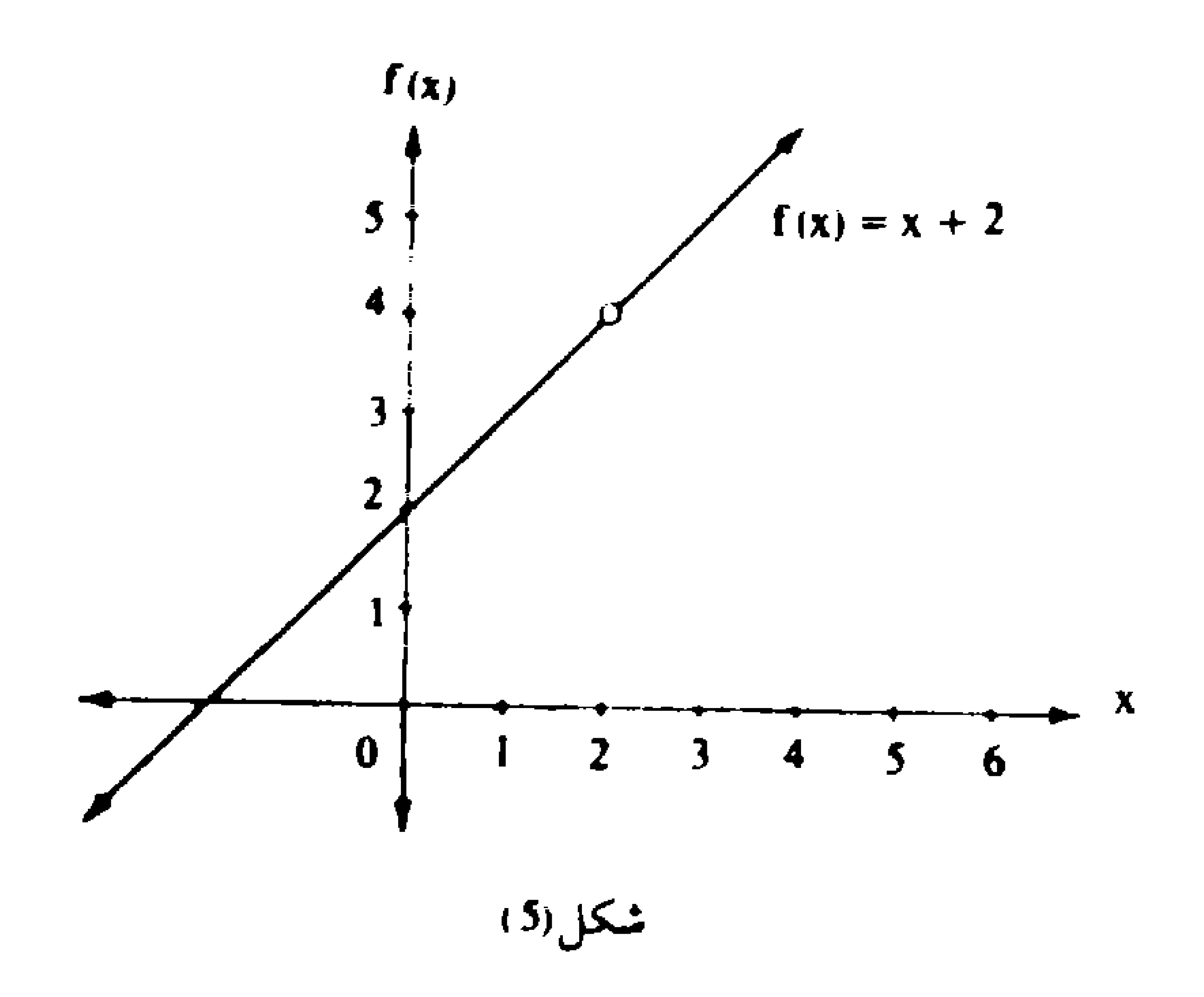
$$f(2) = 4$$

فتصبح الدالة متصلة في2 . ولكننا اذا عرفنا $f(2)$ أية قيمة تختلف عن4 فتبقى الدالة غير متصلة في2 . وعليه فان هذه المناقشة تقودنا الى التعريف التالي .

تعريف «١» :

تكون دالة متصلة في $x = a$ اذا كانت

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$



شكل(5)

ان هذا التعريف يعني انه لأجل أن تكون الدالة f متصلة في $x = a$ ينبغي ان تتوفر الشروط الثلاثة التالية :

(١) الدالة f معرّفة في a . أي أن $f(a)$ معرفة .

(٢) النهاية

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

موجودة

(٣)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

تعريف «٢» :

يقال لدالة f بأنها متصلة في فترة مفتوحة اذا كانت متصلة في كل نقطة من نقاط تلك الفترة .

اليك الآن بعض الأمثلة التوضيحية .

مثال «١» :

افرض ان

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases}$$

الحل :

نلاحظ ان

$$\lim_{x \to 2} (3x + 2) = 3(2) + 2 = 8$$

بما ان $f(2)$ معرّفة وتساوي 8 . نستنتج ان الدالة متصلة في $x = 2$

مثال «٢» :

افرض ان الدالة f معرّفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 6x & 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & x \geq 5 \end{cases}$$

هل الدالة f متصلة في $x = 5$ ؟

الحل :

عندما تقترب x من 5 من اليسار نرى من تعريف الدالة ان قيمة $f(x)$ تقترب من 30 . وعندما x تقترب من 5 من اليمين فان قيمة $f(x)$ تقترب من 35 . وعليه فان

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

غير موجودة .

ونستنتج من هذا ان الدالة غير متصلة في 5 وذلك لعدم توفر الشرط الثاني من شروط الاتصال .

مثال «٣» :

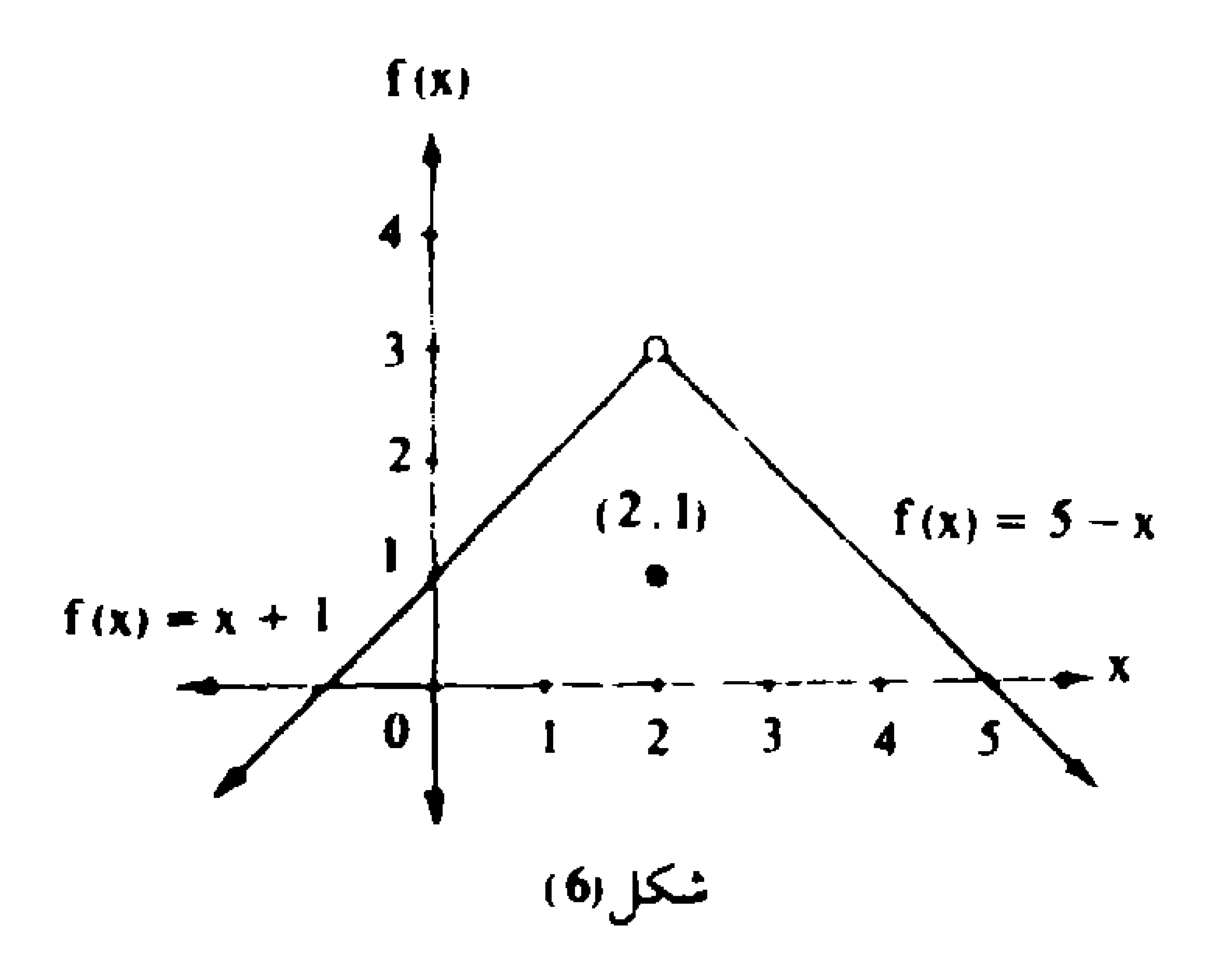
اذا كانت الدالة f معرّفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ 5 - x, & x > 2 \end{cases}$$

ارسم الرسم البياني للدالة وبين ما اذا كانت متصلة في $x = 2$.

الحل :

ترى الرسم البياني في الشكل(6)



شكل(6)

بما ان قيمة $f(x)$ تقترب من 3 عندما x تقترب من 2 من الجانبين الأيسر والأيمن .

اذا

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

ولكن

$$f(2) = 1$$

اذا

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

أي ان الشرط الثالث من شروط الاتصال غير متوفر . وعليه فان الدالة غير متصلة في $x = 2$.

ولكن اذا كان تعريف الدالة يختلف في $x = 2$ حيث كان

$$f(2) = 3$$

بدلاً من 1 ، فان الدالة في تلك الحالة تكون متصلة في $x = 2$.

فيما يلي بعض خواص الدوال المتصلة :

١) اذا كانت

$$f(x) = c$$

حيث c عدد ثابت ، فان الدالة متصلة لجميع قيم x .

٢) اذا كانت

$$f(x) = X^n$$

حيث n أي عدد صحيح موجب ، فان الدالة f متصلة لجميع قيم x .

٣) اذا كانت الدالة f متصلة في a وكان c أي عدد ثابت فان الدالة cf متصلة في a

٤) اذا كانت كل من f و g دالة متصلة في a ، فكذلك الدوال H,G,F حيث

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

$$G(x) = f(x) - g(x)$$

$$H(x) = f(x) . g(x)$$

متصلة في a

أي ان مجموع دالتين متصلتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما يعطي دالة متصلة .

٥) أية كثيرة حدود

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

تعتبر دالة متصلة في جميع قيم x ، حيث n عدد صحيح موجب أو صفر وكل من الثوابت

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

يعتبر عدداً حقيقياً .

٦) اذا كانت كل من $p(x)$ و $q(x)$ دالة كثيرة حدود فان الدالة النسبية

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

دالة متصلة في x_0 بشرط ان

$$q(x_0) \neq 0$$

تمارين (٢) :

في التمارين من 1 الى 6 بينّ ما اذا كانت الدالة متصلة في النقطة المعطاة

1. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 2 \\ 7, & x > 2 \end{cases}$; $x = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 3 \\ 4x - 2, & x > 3 \end{cases}$; $x = 3$

3. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leq 1 \\ 5x, & x > 1 \end{cases}$; $x = 1$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$; $x = 0$

5. $f(x) = |x - 1|$: $x = 1$

6. $f(x) = |x - 3|$: $x = 3$

في التمارين من 7 الى 12 بينّ ما اذا كانت الدالة متصلة في جميع نقاط نطاق الدالة

7. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \neq 3 \\ 9, & x = 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 3 \\ x - 2, & x > 3 \end{cases}$

10. $f(x) = |2x - 1|$

11. $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}\right), & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

$$12.\ f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}\right), & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

في التمارين من 13 الى 16 أوجد جميع قيم x التي تكون الدالة غير متصلة فيها

$$13.\ f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

$$15.\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 12}$$

$$14.\ f(x) = \frac{1}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$16.\ f(x) = \frac{(x - 3)}{x^2 + 5x + 6}$$

الباب الثالث عشر

التفاضل

يتناول هذا الباب دراسة مفهوم مشتقة الدالة وعرض أساليب مختلفة لحساب مشتقة الدوال الجبرية والأسية واللوغاريتمية .

(١٣ ـ ١) تعريف مشتقة الدالة :

من احدى استخدامات نهاية دالة هي في تعريف مشتقة الدالة ، التي تعتبر من أهم المفاهيم في الرياضيات والتطبيقات .

لنفرض ان f دالة وان a واقعة داخل نطاقها . في التعبير

$$\frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

تعتبر a مقداراً ثابتاً ، تعتمد عليه قيمة التعبير . لاحظ ان هذا التعبير دالة في u نرمز لها بالرمز F ، أي ان :

$$F(u) = \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

الدالة F، معرّفة لجميع قيم u التي تكون فيها f معرّفة باستثناء a . فمثلاً اذا كان

$$f(x) = x^2$$

وأن $a = 2$ ، فان

$$F(u) = \frac{u^2 - 4}{u - 2}$$

نسأل الآن ما اذا كان للدالة F نهاية عندما تقترب u من a ، أي بعبارة أخرى هل النهاية

$$(1) \quad \lim_{u \to a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

موجودة ؟ بالنسبة للدالة

$$f(x) = x^2 , a = 2$$

يكون السؤال هل النهاية

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

موجودة ؟ لكن

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

اذا نهاية الدالة موجودة .

لدوال أخرى f ولأعداد أخرى a ، النهاية في(1) قد تكون وقد لا تكون موجودة . عندما تكون هذه النهاية موجودة سيكون الوضع مهما جداً ومن الملائم ان يكون لدينا ترميز أبسط لهذه النهاية . نكتب $f'(a)$ للتعبير عن النهاية في(1) ويسمى هذا العدد مشتقة Derivative الدالة f في a .

تعريف «١» :

لتكن f دالة وليكن a عدداً في نطاقها . مشتقة الدالة f في a هو العدد

$$f'(a) = \lim_{u \to a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

بشرط ان يكون لهذه النهاية وجود . اذا كانت النهاية موجودة يقال للدالة بانها قابلة للتفاضل Differentiable في a .

للدالة
$$f(x) = x^2$$

بينا ان
$$f'(2) = 4$$

قبل ان نبين كيفية استخدام المشتقة . نعطي بعض الأمثلة .

مثال «١» :

اذا كانت
$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

فأوجد $f'(-1)$ اذا كانت موجودة .

الحل :

حسب التعريف يجب ان نجد قيمة

$$\lim_{u \to -1} \frac{f(u) - f(-1)}{u - (-1)}$$

ولكن

$$\lim_{u \to -1} \frac{f(u) - f(-1)}{u - (-1)} = \lim_{u \to -1} \frac{u^2 + 3u - 5 - (-7)}{u + 1}$$

$$= \lim_{u \to -1} \frac{u^2 + 3u + 2}{(u + 1)} = \lim_{u \to -1} \frac{(u + 1)(u + 2)}{u + 1}$$

$$= \lim_{u \to -1} (u + 2) = 1$$

اذا $f'(-1)$ موجودة وتساوي 1

مثال «٢» :

اذا كانت

$$f(x) = x^2$$

فأوجد $f'(a)$

الحل :

$$f'(a) = \lim_{u \to a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a} = \lim_{u \to a} \frac{u^2 - a^2}{u - a}$$

$$= \lim_{u \to a} \frac{(u - a)(u + a)}{(u - a)} = \lim_{u \to a} (u + a) = 2a$$

بما ان a يمكن ان يكون أي عدد فان

$$f'(3) = 2(3) = 6, f'(0) = 2(0) = 0, f'(-1) = -2, f'(x) = 2x$$

وهذه هي قيمة مشتقة الدالة في

$$3, 0, -1, x$$

على التوالي .

مثال «٣» :

اذا كانت

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

فأوجد $f'(x)$

الحل :

ليس هناك تأكيد بوجود المشتقة لمجرد السؤال بايجادها .

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{x}}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{(x - u)}{ux(u - x)} = \lim_{u \to x} \frac{-1}{ux} = \frac{-1}{\lim_{u \to x} ux} = \frac{-1}{x^2}$$

المشتقة موجودة وان الدالة f قابلة للتفاضل لجميع قيم x التي لا تساوي صفراً .

وهناك رموز أخرى مستعملة لمشتقة الدالة . اذا كانت

$$Y = f(x)$$

فان بعض الرموز المستعملة للتعبير عن مشتقة الدالة هي

$$D_y,\ D_{xy},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}(f(x)),\ \frac{dy}{dx},\ y'$$

مثال «٤» :

أوجد

$$D_{x^3}$$

الحل :

افرض ان $g(x) = x^3$

$$Dx^3 = g'(x) = \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{u^3 - x^3}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{(u - x)(u^2 + ux + x^2)}{(u - x)} = \lim_{u \to x} (u^2 + ux + x^2)$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

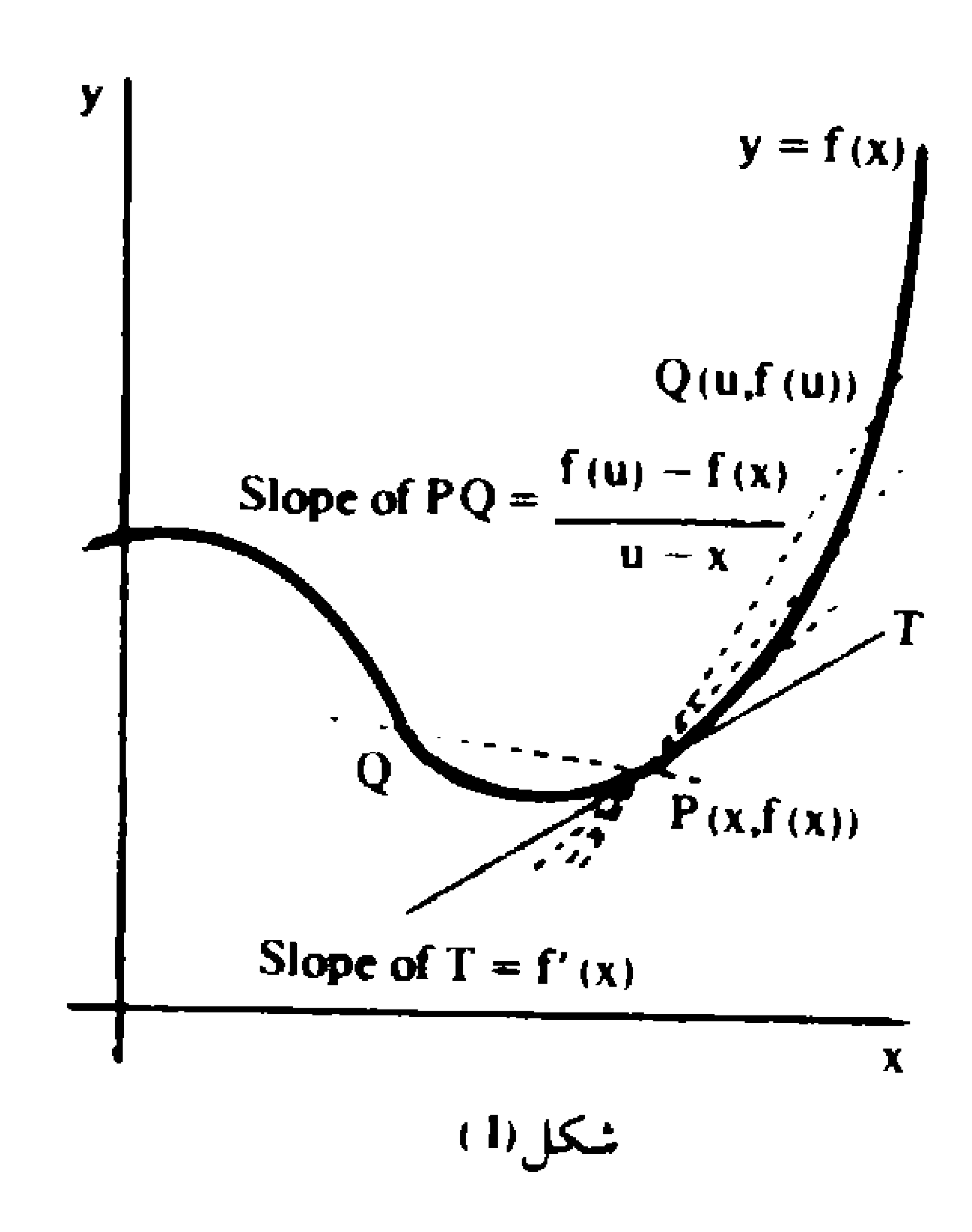
اذا كنا نستعمل المعادلة

$$y = x^3$$

لكان بامكاننا كتابة

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \text{أو} \quad y' = 3x^2$$

للمشتقة تفسير هندسي مهم . الرسم البياني لدالة نموذجية مرسوم في الشكل(1)



شكل(1)

لنفرض ان$P(x,f(x))$ و$Q(u,f(u))$ نقطتان على الرسم البياني . ميل المستقيمPQ المار منQ,P هو

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

عندما تقتربu منx،Q تتحرك على الرسم البياني باتجاهP والخطPQ يدور حولP ويقترب من مماس المنحني فيP . من المعقول ان نفترض ان في نفس الوقت ميلPQ يقترب من ميل المماس عندماu تقترب منx . ولكن هذه عملية نهاية . ويمكن ان نقول ان

$$\text{ميل المماس}\ PQ = \lim_{u \to x} (\text{ميل القاطع}\ PQ)$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = f'(x)$$

على ان تكون النهاية الأخيرة موجودة .

(كما هي الحالة في أية مسألة نهاية يجب ان تعتبر قيمu التي هي أقل منx وقيمu التي هي أكبر منx) . ومعنى هذا ان مشتقة الدالةf فيx هي ميل المماس للمنحني

$$y = f(x)$$

في النقطة$(x \text{ و } f(x))$. قبل أن ندرس هذا بدقة أكثر لنعيد النظر في بعض أمثلتنا السابقة .

في المثال «٢» بينا ان للدالة

$$f(x) = x^2$$

مشتقة

$$f'(x) = 2x$$

هذا هو ميل المنحني

$$y = x^2$$

في النقطة(x,x^2) . نجد المنحني مرسوماً في الشكل2 . ميل المماس للمنحني في النقطة$(1,1)$ هو .

$$f'(1) = 2$$

الشكل(2)

ميل المماس في النقطة$(2,4)$ هو

$$f'(2) = 4$$

وكلما زادت قيمة x فان النقطة (x,x^2) تتحرك الى الأعلى وعلى النصف الأيمن من المنحني والميل $2x$ للمماس يزداد . ففي نقطة الأصل ميل المماس يساوي صفراً . ميل المماس في النقطة $(-1,1)$ يساوي

$$f'(-1) = -2$$

وعموماً يكون ميل المماس سالباً عند كل نقطة $x < 0$ من النقط الواقعة على النصف الأيسر للمنحنى .

ومن الطبيعي ان نعرف ميل أي منحني في نقطة ما بأنه ميل مماس ذلك المنحني في تلك النقطة . فميل المنحني

$$y = f(x)$$

في النقطة $(x,f(x))$ هو $f'(x)$ وهو مقياس لانحدار المنحني في تلك النقطة .

تعريف : المماس للمنحني

$$y = f(x)$$

في النقطة $P(x,f(x))$ هو الخط المستقيم المار بالنقطة P والذي ميله يساوي $f'(x)$. باستثناء المماسات العمودية ، لا يوجد مماس في P اذا كان $f'(x)$ غير موجود .

يعرف العمودي Normal لمنحني في نقطة P بأنه المستقيم المار من نقطة P والعمود على المماس للمنحني في نقطة P .

بمساعدة المشتقة من السهل ايجاد معادلتي المماس والعمودي .

مثال «٥» :

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحني

$$y = x^2$$

في النقطة $(3,9)$.

الحل :

اذا فرضنا ان

$$f(x) = x^2$$

فمن المثال ٢

$$f'(x) = 2x$$

وميل المماس في النقطة (3,9) هو

$$f'(3) = 6$$

اذا حسب قانون معادلة المستقيم بمعلومية النقطة والميل ، فان معادلة المماس هي

$$y - 9 = 6(x - 3)$$

أو

$$6x - y - 9 = 0$$

ميل العمودي يساوي $-\frac{1}{6}$ وعليه فان معادلته هي

$$y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$$

أو

$$x + 6y - 57 = 0$$

مثال «٦» :

لأي خط مستقيم ميله m معادلة من نمط

$$y = mx + b$$

والدالة المناظرة هي

$$f(x) = mx + b$$

اثبت ان الميل $f'(x)$ للمستقيم في النقطة (x,y) يساوي m .

الحل :

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{(mu + b) - (mx + b)}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{m(u - x)}{(u - x)} = \lim_{u \to x} m = m$$

وهو المطلوب اثباته .

تعرف مشتقة دالة f في نقطة x بأنها

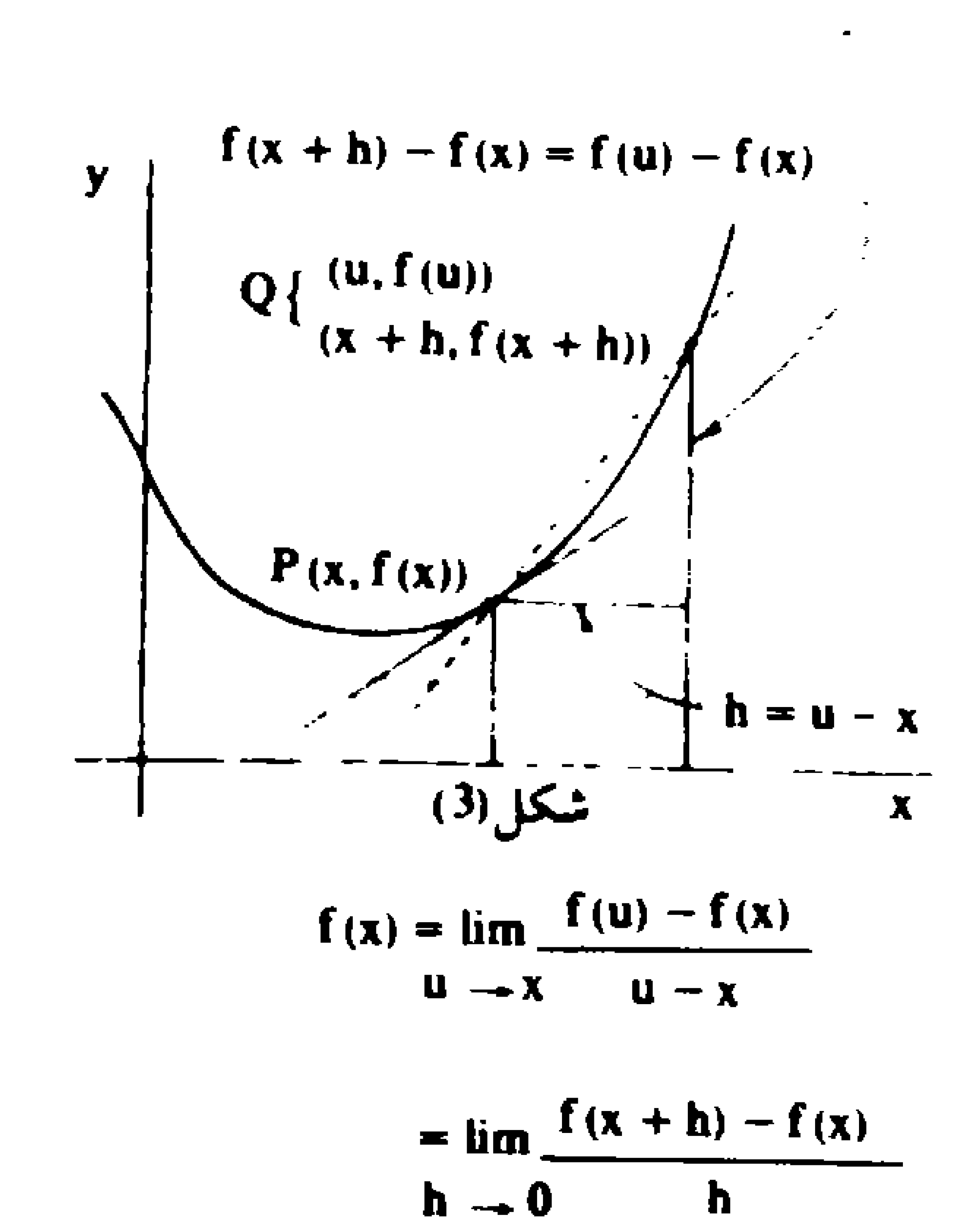
$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad (2)$$

ويسمى المقدار

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

خارج قسمة فروق f (Difference Quotient) . وكما رأينا هو ميل الخط المار بين $P(x,f(x))$ و $Q(u,f(u))$. يمكن التعبير عن الاحداثي x للنقطة Q كذلك بشكل $x + h$ حيث h هي المسافة المتجهة من P الى Q (أنظر الى الشكل 3) فيكون الاحداثي y لنقطة Q اذا $f(x + h)$ ، و $h = u - x$ ، واذا كانت النقطة Q واقعة الى يسار النقطة P فان h سالبة . اما اذا كانت واقعة الى يمين النقطة P فان h موجبة . بما ان u تقترب الى x باقتراب h الى الصفر وبالعكس ، فان التعبير التالي يعتبر تعبيراً آخر لمشتقة دالة وهذا التعبير أكثر استعمالا من التعبير الأول

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (3)$$



شكل (3)

$$f(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

اذا استعملنا هذا التعبير لايجاد المشتقة في المثال «١» في ايجاد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 + 3x - 5$ في -1 لكان الحل كما يلي :

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(-1+h)^2 + 3(-1+h) - 5] - [-7]}{}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h^2 + h - 7) - (-7)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 1) = 1$$

تمارين (١) :

اذا كانت $g(x) = 3x - 5$ أوجد $g(x + h)$ لكل من القيم الآتية :

a) $x = 4 , h = \frac{1}{2}$

b) $x = 4 , h = -\frac{1}{2}$

ثم أوجد. $g'(x)$

في التمارين من 2 الى 7 أوجد المشتقة المشار اليها لكل من الدوال الآتية :

2. $f(x) = x^2 + 3, f'(2), f'(-1)$.

3. $f(x) = -2x^2 + 5, f'(0), f'(a)$.

4. $g(x) = x^2 + 5x + 1, g'(2), g'(x)$.

5. $g(x) = \frac{2}{x+1}, g'(-4), g'(c)$.

6. $f(t) = t^2/(t-2), f'(1)$.

7. $F(r) = 6/r^2, F'(-2)$.

في التمارين من 8 الى 12 استخدم القاعدة :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

لايجاد المشتقات الآتية :

8. $f(x) = -10x - 3, f'(3)$.

9. $f(x) = x^2, f'(x)$.

10. $f(x) = -2x^2 - 4x + 1, f'(0), f'(x)$.

11. $g(x) = x^3, g'(1), g'(x)$.

12. $g(t) = 1/t, g'(-3)$.

(١٣ ـ ٢) قواعد القوة والجمع :

للمشتقة تطبيقات كثيرة . ولكن قبل دراسة التطبيقات ينبغي ان نجد طرقاً أكثر كفاءة للحصول على المشتقة بدلاً من الاستخدام المباشر للتعريف . المشكلة هنا مشابهة لما كانت عليه في النهايات فأغلب الدوال الاعتيادية يمكن اعتبارها مكونة من بضعة دوال بسيطة بعمليات متكررة من الجمع والضرب وغيرهما . سوف نجد مشتقة الدوال الاساسية بواسطة التعريف ثم نبتكر قوانين مناظرة لقوانين النهايات لربطها والحصول على مشتقة الدالة المطلوبة . نبدأ بدالتين بسيطتين هما :

$$f(x) = k,$$

حيث k عدد ثابت و

$$g(x) = x$$

سبق وبينا في مثال6 ، آن

$$D(mx + b) = m$$

اذا وضعنا في هذه القاعدة

$$m = 0, b = k$$

لحصلنا على

$$D(k) = 0$$

اذا وضعنا

$$m = 1, b = 0$$

لحصلنا على

$$Dx = 1$$

برهنا الآن ما يلي

لأي ثابت k

$$(4) \quad Dk = 0$$
$$(5) \quad Dx = 1$$

بما ان الرسوم البيانية لـ

$$g(x) = x \quad f(x) = k$$

خطوط مستقيمة فان هذه النتائج يجب أن تكون متوقعة .

نتكلم الآن عن دالة القوة

$$f(x) = x^n$$

حيث n عدد صحيح موجب . وجدنا الآن المشتقة عندما n تساوي 1 ، والتي يمكن كتابتها بشكل

$$Dx = 1 = 1x^0$$

ووجدنا في المثالين «٢ ، ٤» ان مشتقة x^2 هي $2x$ ومشتقة x^3 هي $3x^2$. أي ان

$$Dx^2 = 2x, \; Dx^3 = 3x^2$$

يمكن ان يخمن القارىء من هذه النتائج ان

$$Dx^4 = 4x^3, \; Dx^7 = 7x^6$$

أو بصورة عامة ان

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

ولكن ليس هذا الا تخميناً وكتخمينات أخرى في الرياضيات قد تكون خاطئة . مع ذلك فان هذه النتيجة صحيحة .

قاعدة القوة	
حيث n أي عدد صحيح موجب	(6) $Dx^n = nx^{n-1}$

لاثبات صحة قاعدة القوة نعود الى تعريف مشتقة الدالة .

افرض ان

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[(x+h)^n - x^n \right]$$

باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\left(x^n + nx^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n \right) - x^n \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[h(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1})$$

$$= nx^{n-1}$$

وذلك لأن جميع الحدود باستثناء الحد الأول تقترب الى الصفر وذلك لوجود h فيها واقتراب h الى الصفر . وهذا يثبت قاعدة مشتقة القوة .

ننتقل الآن من دوال خاصة الى مشتقة اتحادات دوال . الدالة $5x^3$ من نمط $kf(x)$ حيث

$$k = 5, f(x) = x^3$$

مشتقة أي دالة من الدوال التي يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب في دالة يمكن ايجادها حسب القاعدة التالية

> اذا كان للدالة f مشتقة في x فكذلك للدالة kf لأي ثابت k و
>
> (7) $Dkf(x) = k\,Df(x)$

البرهان :

افرض ان

$$F(x) = kf(x)$$

من تعريف المشتقة عندنا

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{kf(u) - kf(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} k \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = k \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

هذه النهاية الأخيرة حسب التعريف هي $f'(x)$ ، والموجودة حسب الفرضية . اذا

$$F'(x) = kf'(x)$$

وهو المطلوب .

يمكن ايجاد مشتقة $5x^3$ باستخدام هذه القاعدة ثم قاعدة القوة كما يلي :

$$D\,5x^3 = 5\,Dx^3$$
$$= 5(3x^2)$$
$$= 15x^2$$

افرض ان دالة ما هي مجموع دالتين لكل منهما مشتقة في x . هل يمكن استخدام مشتقتي الدالتين لايجاد مشتقة المجموع دون اللجوء الى تعريف المشتقة ؟ الواقع ما علينا إلا أن نجمع المشتقتين للحصول على مشتقة المجموع .

قاعدة المجموع

اذا كان للدالتين f و g مشتقة في x فكذلك لمجموعهما والفرق بينهما وان

$$D[\,f(x) \mp g(x)\,] = Df(x) \mp Dg(x) \tag{8}$$

فمثلاً اذا كان $f(x) = x^3\,,\, g(x) = x^5$

فان $D(x^3 + x^5) = Dx^3 + Dx^5 = 3x^2 + 5x^4$

البرهان :

نبرهن هذه القاعدة لمجموع دالتين . برهان الفرق بين دالتين مماثل لهذا البرهان . افرض ان

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

حسب تعريف المشتقة لدينا

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{4 \to x} \frac{[\,f(u) + g(u)\,] - [\,f(x) + g(x)\,]}{u - x}$$

$$= \lim_{4 \to x} \left[\frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

لاحظ ان فرضية وجود $f'(x)$ و $g'(x)$ هي طريقة اخرى لتأكيد وجود النهايتين في السطر السابق . لذلك يمكن تطبيق نظرية نهاية مجموع دالتين تساوي مجموع نهايتي الدالتين فنحصل على

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$

$$= f'(x) + g'(x) .$$

وهو المطلوب .

يمكن تعميم قاعدة الجمع الى أكثر من دالتين

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \ldots . + f_n(x)] = Df_1(x) + Df_2(x) + \ldots + Df_n(x)$$

على شرط ان يكون للدوال

$f_1, f_2, \ldots, f_n$

مشتقات في x

هناك قاعدة مشابهة بالنسبة لمجاميع وفروق بين دوال .

مثال «١» :

أوجد $D[x^3 - 6x^2 + 8]$

الحل :

$$D(x^3 - 6x^2 + 8) = Dx^3 - D(6x^2) + D8$$

$$= Dx^3 - 6Dx^2 + D8$$

$$= 3x^2 - 6(2x) + 0$$

$$= 3x^2 - 12x .$$

مثال «٢»:

أوجد

$$\frac{d}{dt}(4t^5 + \sqrt{2}t^4 - t^3 - t + 7)$$

الحل :

$$\frac{d}{dt}(4t^5 + \sqrt{2}t^4 - t^3 - t + 7) = \frac{d}{dt}4t^5 + \frac{d}{dt}\sqrt{2}t^4 - \frac{d}{dt}t^3 - \frac{d}{dt}t + \frac{d}{dt}7$$

$$= 4\frac{d}{dt}t^5 + \sqrt{2}\frac{d}{dt}t^4 - \frac{d}{dt}t^3 - \frac{d}{dt}t + \frac{d}{dt}7$$

$$= 4(5t^4) + \sqrt{2}(4t^3) - 3t^2 - 1 + 0$$

$$= 20t^4 + 4\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 1.$$

مثال «٣» :

أوجد

$$D[\frac{7}{4}(z^3 + bz^2 + c)]$$

الحل :

من المتفق عليه في التفاضل ان الحروف في بداية الحروف الهجائية تعتبر ثوابت . لذا فان المقدار اللازم تفاضله هنا هو دالة للمتغير z وانb و c ثوابت . بما ان المقدار من نمط ثابت مضروب في دالة وعليه فاننا نطبق أولاً قاعدة مشتقة ثابت مضروب في دالة لنحصل على

$$D[\frac{7}{4}(z^3 + bz^2 + c)] = \frac{7}{4}D(z^3 + bz^2 + c) = \frac{7}{4}(3z^2 + b2z + 0)$$

$$= \frac{7}{4}(3z^2 + 2bz).$$

مثال «٤» :

أوجد $\frac{dz}{dy}$ اذا كان

$$z = y^2(x^2 + 2xy^3)$$

حيث x عدد ثابت هنا .

الحل :

نبدأ بضرب المقدار أولاً لكتابة المقدار كمجموع دالتين . يجب أن نتذكر هنا ان x ثابت . نحصل على

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2 y^2 + 2xy^5) = x^2\, 2y + 2x\, 5y^4 = 2x^2 y + 10xy^4$$

تسمى المشتقة التي وجدت أخيراً مشتقة $y^2 (x^2 + 2xy^3)$ بالنسبة الى y للاشارة الى اعتبار المقدار دالة للمتغير y . المشتقة بالنسبة الى x باعتبار ان y ثابت هي

$$\frac{d}{dx}\left[y^2 (x^2 + 2xy^3) \right] = y^2 \frac{d}{dx}(x^2 + 2xy^3) = y^2 (2x + 2y^3)$$

تمارين (٢) :

في التمارين من 1 الى 12 أوجد كلاً من المشتقات الآتية :

1. $D(-2x - 3)$.
2. $D(u^2 + \frac{1}{2})$
3. $\frac{d}{dx}(3x^2 - 3x + 2)$
4. $\frac{d}{dx}\frac{1}{x-4}$
5. $D(at + \frac{b}{t})$ a and b const.
6. $D\frac{5}{x^2}$
7. $D\sqrt{z+1}$.
8. $\frac{d}{dt}(t^3 + t^2 - 1)$.
9. $D(x^4 + x - 2)$.
10. $Dx^{1/3}$.
11. $\frac{d}{dx}\, x\sqrt{x}$.
12. $D_x(2x^3 + x + z^2)$ Z مقدار ثابت

13 . ارسم شكل المعادلة $y = x^2 - 4$ وأوجد ميل المماس للمنحني عند أي نقطة (x,y) .

عند أي نقطة يكون الميل مساوياً 2,3,0 − ؟

14 . منحني المعادلة $y = 4 + 3x - x^2$ يمثل قطعاً مكافئاً . أوجد تقاطعه مع المحاور واستخدم ذلك في رسم القطع .

15 . أوجد ميل المماس للمنحني عند أي نقطة (x,y) واستخدم ذلك في ايجاد أعلى نقطة على المنحنى .

16 . أوجد نقاط تقاطع المنحني $y = x^3 - x$ مع المحاور .

أوجد ميل المماس للمنحنى عند اي نقطة . وعند أي نقطة يكون ميل المماس مساوياً صفر .

استخدم هذه المعلومات في رسم المنحني .

17 . أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحني $y = \frac{1}{x}$ عند النقطة $(3, \frac{1}{3})$.

18 . أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحني $y = -x^2 + x + 1$ عند النقطة $(2, -1)$

(١٣ - ٣) قواعد الضرب والقسمة :

لنفرض ان دالة هي حاصل ضرب دالتين f و g ذات مشتقة في x . نبحث عن طريقة للتعبير عن مشتقة حاصل الضرب fg بدلالة مشتقة الدالة f ومشتقة الدالة g كما فعلنا في مشتقة مجموع دالتين . وربما تقودنا قاعدة نهاية حاصل ضرب دالتين الى الاعتقاد بان

$$D[f(x)\,g(x)] = Df(x)\,Dg(x)$$

ومن السهل تجربة هذه القاعدة على الدالتين

$$f(x) = x^5, \; g(x) = x^3$$

لدينا

$$Dx^5 = 5x^4, \; Dx^3 = 3x^2,$$

وعليه ففي هذه الحالة

$$D[f(x)\,g(x)] \neq Df(x)\,Dg(x)$$

وعليه فان اعتقادنا كان خاطئاً . لنرى الآن ماذا يجب أن تكون مشتقة حاصل ضرب دالتين .

نفترض ان لكل من الدالتين f و g مشتقة في x . افرض ان

$$F(x) = f(x)\,g(x)$$

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{f(u)\,g(u) - f(x)\,g(x)}{u - x}$$

كما هي الحالة في برهان مشتقة مجموع دالتين ، نرغب التعبير عن خارج القسمة في التعبير الأخير بدلالة خوارج قسمة فروع الدالتين f و g . هناك كان اتجاهنا للوصول الى هذا الهدف واضحاً الى حد ما بينما الأمر ليس واضحاً هنا . هناك طريقة مستعملة تفي بالغرض وهي اضافة وطرح $f(u)\,g(x)$ في بسط الطرف الأيمن من صيغة $F'(x)$ فنحصل على

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u)\,g(u) - f(u)\,g(x) + f(u)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{f(u)\,[\,g(u) - g(x)\,] + g(x)\,[\,f(u) - f(x)\,]}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \left[f(u)\,\frac{g(u) - g(x)}{u - x} + g(x)\,\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \right]$$

$$= \left[\lim_{u \to x} f(u) \right] \left[\lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

$$+ \left[\lim_{u \to x} g(x) \right] \left[\lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \right]$$

$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x).$$

وهو المطلوب .

قاعدة حاصل الضرب

اذا كان لكل من الدالتين f و g مشتقة في x فكذلك للدالة fg مشتقة في x وأن

$$D[\,f(x)g(x)\,] = f(x)\,Dg(x) + g(x)\,Df(x)$$

أسهل طريقة لحفظ قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين هي «حاصل ضرب الدالة الأولى في مشتقة الدالة الثانية مضافاً الى ذلك حاصل ضرب الدالة الثانية في مشتقة الدالة الأولى» . لنحاول مرة أخرى الحصول على مشتقة حاصل الضرب هذه المرة باستخدام قاعدة حاصل الضرب . لدينا

$$D(x^2 x^3) = x^2\,Dx^3 + x^3\,Dx^2 = x^2\,3x^2 + x^3\,2x = 5x^4$$

والتي هي مشتقة x^5

مثال «١» :

أوجد $D[\,(x^3 - 3x)(x^2 + 1)\,]$

الحل :

مع اننا يمكننا التعبير عن المقدار بشكل كثير الحدود ثم استخدام قاعدة الجمع ولكننا سوف نستخدم قاعدة حاصل الضرب والتي تعطي

$$D\left[(x^3 - 3x)(x^2 + 1)\right] = (x^3 - 3x)\,D(x^2 + 1) + (x^2 + 1)\,D(x^3 - 3x)$$

$$= (x^3 - 3x)(2x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 3)$$

$$= 5x^4 - 6x^2 - 3$$

وبصورة خاصة قيمة المشتقة في 2 هي

$$5(2^4) - 6(2^2) - 3 = 53$$

للحصول على مشتقة دوال كالدالة $\frac{x^3}{2x + 1}$ نحتاج الى قاعدة لمشتقة خارج قسمة دالتين .

قاعدة خارج القسمة

اذا كان لكل من الدالتين f و g مشتقة في x ، كذلك لدالة خارج القسمة $\frac{f}{g}$ وان

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\,Df(x) - f(x)\,Dg(x)}{g^2(x)} \qquad g(x) \neq 0$$

البرهان :

افرض ان

$$F(x) = f(x)/g(x).$$

اذا

$$F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u)/g(u) - f(x)/g(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{f(u)\,g(x) - f(x)\,g(u)}{g(u)\,g(x)\,(u - x)}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{f(u)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(u)}{g(u)\,g(x)\,(u-x)}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{1}{g(x)} \; \frac{1}{g(u)} \; \frac{g(x)\,[\,f(u) - f(x)\,] - f(x)\,[\,g(u) - g(x)\,]}{u - x}$$

$$= \frac{1}{g(x)} \left[\lim_{u \to x} \frac{1}{g(u)} \right] \left[g(x) \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} - f(x) \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} \right]$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} \left[g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x) \right].$$

أسهل طريقة لحفظ قاعدة خارج القسمة هي «مشتقة خارج قسمة دالتين تساوي المقام في مشتقة البسط ناقصاً البسط في مشتقة المقام مقسوماً على مربع المقام» .

مثال «٢» :

أوجد

$$D \frac{x^3}{2x + 1}$$

الحل :

باستخدام قاعدة خارج القسمة نحصل على

$$D \frac{x^3}{2x+1} = \frac{(2x + 1)\,Dx^3 - x^3\,D(2x + 1)}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x + 1)\,3x^2 - x^3\,(2)}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2\,(4x + 3)}{(2x + 1)^2}$$

وهذا صحيح لأي $x \neq -\frac{1}{2}$

قاعدة خارج القسمة تساعدنا على تعميم قاعدة القوة الى قيمn السالبة . افرض ان$0 > n$. حسب قاعدة خارج القسمة عندنا

$$Dx^n = D\frac{1}{x^{-n}} = \frac{x^{-n}D1 - 1Dx^{-n}}{(x^{-n})^2}$$

بما ان$0 < n -$ لذا يمكننا ايجادDx^{-n} حسب قاعدة القوى .

اذا

$$Dx^n = \frac{x^{-n}(0) - 1(-nx^{-n-1})}{x^{-2n}} = nx^{-n-1}x^{2n} = nx^{n-1}$$

وهذا يبرهن قاعدة القوة للقيم السالبة .

وعليه فان

لجميع الأعداد الصحيحةn $\quad Dx^n = nx^{n-1}$

مثلا

$$Dx^{-3} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x4}$$

مثال «٣» :

أوجد $\quad D[(x^4 - 6x^2 - 7x + 5)/x^2]$

الحل :

عندنا

$$D\left(\frac{x^4 - 6x^2 - 7x + 5}{x^2}\right) = D\left(x^2 - 6 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$$

$$= Dx^2 - D6 - 7Dx^{-1} + 5Dx^{-2}$$

$$= 2x + 7x^{-2} - 10x^{-3}$$

$$= 2x + \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3}$$

$$= \frac{2x^4 + 7x - 10}{x^3}$$

مثال «٤» :

أوجد قيم x التي تجعل $f'(x) = 0$ حيث

$$f(x) = \frac{4}{x - 1} + x$$

الحل :

بما ان f معبر عنها كمجموع لذا فاننا نستخدم أولاً قاعدة مشتقة مجموع دالتين ثم نستخدم قاعدة خارج القسمة على الحد الأول كما يلي

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x - 1} + x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x - 1}\right) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{(x - 1)(0) - 4(1)}{(x - 1)^2} + 1 = \frac{-4}{(x - 1)^2} + 1$$

لايجاد أين $f'(x) = 0$ نعبر أولاً عن $f'(x)$ ككسر البسط فيه كحاصل ضرب عوامل

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}$$

بما ان أي كسر يساوي صفراً فقط اذا كان بسطه صفراً . اذا $f'(x) = 0$ اذا كان

$x = 3$ أو $x = -1$

فقط

تمارين (٣) :

في كل من التمارين 1 الى 4 أوجد مشتقة الدالة المعطاة بطريقتين .

أولاً : باستخدام قانون الضرب .

ثانياً : بالتعبير عن الضرب كمجموع حدود ثم استخدام قانون الجمع

1. $3x(x-2)$.
2. $x^2(1-4x)$.
3. $(2s+1)(3s^2-1)$.
4. $(u^2+3u+1)(u^2-3u+1)$.

أوجد كلا من المشتقات الآتية باستخدام قانون الضرب :

5. $y^3(6-3y-2y^2)$.
6. $(5x^2-4)(5x^2+4)$.
7. $(t^4-1)^2$.
8. $(x^2-d^2)(x^2+d^2)$.
9. $(\pi t^2+2)(t^3\sqrt{2}-2)$.
10. $6(x+b)(x^2-ax-6)$.
11. $\pi(b/a)r^2(a-r)$.
12. $(4r^2-2r)(r^3-\frac{1}{2}r^2-r+\sqrt{10})$.
13. $4(2y^2-y-1)(y^3+y+\frac{1}{2})$.
14. $x^3(x^3+1)(2x^2-3)$.
15. $(x^2+1)(x^2-2)(5x+7)$.
16. $(x^3+1)^3$.

أوجد كلا من المشتقات الآتية وبسط الناتج :

17. $\frac{x+1}{x}$
18. $\frac{a}{x+3}$
19. $\frac{2z-5}{2z+5}$
20. $\frac{x^4}{x^2+1}$
21. $5(t^3+\frac{1}{t^3})$.
22. $\frac{x^3+x^2+x-1}{x^2}$
23. $\frac{u^3}{2b-u}$
24. $\frac{x^2+3x}{4x+2}+6x$.
25. $\frac{1}{x^2-3x-4}$
26. $\frac{1-4t}{t^2}+t^3(t+2)$.
27. $(x^2+3)(x+\frac{3}{x})$.
28. $a\,\frac{c+bx}{c-bx}$

29. $(2s + \frac{1}{s})\frac{1-s}{s}$. 30. $(ax + b)^{-1}$. 31. $(u + \frac{1}{u})^2$.

32. $y^2 \frac{a+y}{a-y}$. 33. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 6x + 9}$. 34. $\frac{x^2 + 2}{x + 2/x}$.

35. $\frac{(x^2 - 2x)(1 - x^2)}{3x + 2}$. 36. $\frac{(y + 5)(3y^2 - y - 1)}{4 - y^2}$ 37. $\frac{2z}{(z^2 - 3)(z^3 - 6)}$

38. $\frac{3/y + 1}{1/y - 3}$ 39. $\frac{1 - v^{-1}}{1 + v^{-1}}$ 40. $(5x^2 + 2)\ \frac{1 - \frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}x}$

ما هي القيم التي تكون عندها مشتقة المقادير الآتية تساوي صفراً .

41. $(x^2 + 4)(x - 4)$. 42. $y + \frac{6}{y}$ 43. $z^2 + z^{-2}$.

44. $\frac{x + 1}{x - 2}$ 45. $\frac{1}{1 + u^2}$ 46. $\frac{x + b}{bx^2}$, $b \neq 0$.

47. $\frac{ax}{a^2 + x^2}$, $a \neq 0$. 48. $\frac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2}$, $c \neq 0$. 49. $A(r) = \frac{2b}{r} + 2\pi r^2$.

50. $V(h) = \pi(r^2 h - \frac{h^3}{4})$. عدد ثابت r

حل المعادلات الآتية في y ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$

51. $x^2 - xy = 3$. 52. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6$. 50. $x^2 = \frac{x + y}{x - y}$.

54 . أوجد معادلة المماس للمنحني $y = 7/(3x^2 + 2)$ عند النقطة $(-1, \frac{7}{5})$

55 . أوجد معادلة المماس للمنحني $y = (x^2 - a^2)/(x^2 + a^2)$ بحيث $a \neq 0$ عند النقطة $(a,0)$.

عند أي نقطة يكون المماس أفقياً ؟

(١٣ - ٤) قاعدة السلسلة :

مع أننا يمكننا ايجاد مشتقة $(x^2 + 1)^7$ بواسطة ايجاد مفكوكه أولا ثم ايجاد مشتقة كل حد ولكن هذه عملية تستغرق كثيراً من وقتنا . ولا نستطيع ايجاد المشتقة باستخدام قاعدة القوة لأن المقدار ليس قوة لـ x بل قوة لدالة في x . نحتاج تعمياً لقاعدة القوة لتشمل مقادير قوى لدالة $g(x)$. سوف نجد مثل هذه القاعدة باعتبار $g^n(x)$ كأنها مركبة من دوال ، أي دالة الدالة . ولكن نحتاج أولاً الى قاعدة مماثلة لقواعد الجمع والضرب لتساعدنا في ايجاد مشتقة دالة الدالة $f(g(x))$ المركبة من دالتين بدلالة مشتقة الدالتين f و g .

قاعدة السلسلة
افرض ان $F(x) = f(g(x))$
وان $z = g(x)$
اذا كان للدالة g مشتقة في x وكان للدالة f مشتقة في z فان للدالة F مشتقة وان
$F'(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)\, g'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

الحرف x الظاهر في D_x يذكرنا ان المشتقة هنا بالنسبة للمتغير x أي أن الدالة $f(g(x))$ هي دالة بالنسبة للمتغير x .

مثلا ، افرض ان

$$F(x) = (3x + 1)^2$$

اذا وضعنا

$$f(z) = z^2$$

و

$$z = g(x) = (3x + 1)$$

فان

$$F(x) = f(g(x))$$

وقاعدة السلسلة تعطي

$$F'(x) = (2z)(3) = 6(3x + 1)$$

نذكر هذه القاعدة دون برهان .

سوف تساعدنا قاعدة السلسلة في تعميم العديد من قواعدنا السابقة في التفاضل وذلك لتوسيع مدى استخدام تلك القواعد . نتجه الآن الى ايجاد مشتقة $g^n(x)$

القاعدة صحيحة لأي n	$Dg^n(x) = ng^{n-1} Dg(x)$

البرهان :

اذا وضعنا

$$f(z) = z^n \ , \ z = g(x)$$

اذا

يمكن اعتبار $g^n(x)$ كدالة مركبة من الدالتين f و g

$$g^n(x) = f(g(x))$$

بما ان

$$f'(z) = nz^{n-1}$$

نستنتج من قاعدة السلسلة ان

$$Dg^n(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)\, g'(x)$$

$$= nz^{n-1} g'(x) = ng^{n-1}(x)\, g'(x)$$

وهو المطلوب .

مثال «١» :

أوجد

$$D(x^2 + 1)^7$$

الحل :

هذا المقدار من نمط $g^n(x)$ حيث ان

$$g(x) = x^2 + 1 \quad n = 7$$

وعليه فان

$$D(x^2+1)^7 = 7(x^2+1)^6 D(x^2+1)$$
$$= 7(x^2+1)^6 2x = 14x(x^2+1)^6$$

مثال «٢» :

أوجد

$$D\left[\frac{1}{(x^2-2x)^3}\right]$$

الحل :

بدلاً من استخدام قاعدة خارج القسمة ، نعيد كتابة المقدار المطلوب اشتقاقه بشكل $(x^2-2x)^{-3}$. هذا المقدار الآن بشكل $g^n(x)$ حيث ان

$$g(x) = x^2 - 2x ,\ n = -3$$

وعليه فان

$$D\left[\frac{1}{(x^2-2x)^3}\right] = D(x^2-2x)^{-3} = -3(x^2-2x)^{-4} D(x^2-2x)$$
$$= -3(x^2-2x)^{-4}(2x-2) = \frac{-6(x-1)}{(x^2-2x)^4}$$

مثال «٣» :

أوجد

$$D[(z^2+2)^3(3z+1)^2]$$

الحل :

المقدار المطلوب اشتقاقه عبارة عن حاصل ضرب . نبدأ أولاً بقاعدة حاصل الضرب

$$D[(z^2+2)^3(3z+1)^2] = (z^2+2)^3 D(3z+1)^2 + (3z+1)^2 D(z^2+2)^3$$
$$= (z^2+2)^3\, 2(3z+1)\, D(3z+1)$$
$$+ (3z+1)^2\, 3(z^2+2)^2\, D(z^2+2)$$

$$= (z^2 + 2)^3\, 2(3z + 1)\, 3 + (3z + 1)^2\, 3(z^2 + 2)^2\, 2z$$

$$= 6(z^2 + 2)^2 (3z + 1) \left[(z^2 + 2) + (3z + 1) z \right]$$

$$= 6(z^2 + 2)^2 (3z + 1)(4z^2 + z + 2) .$$

مثال «٤» :

أوجد معادلة المماس في النقطة $(2,8)$ للمنحني

$$y = \left(\frac{x}{x - 1} \right)^3$$

الحل :

نجد اولاً المشتقة في x

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x}{x - 1} \right)^2 D\left(\frac{x}{x - 1} \right)$$

$$= 3\left(\frac{x}{x - 1} \right)^2 \left[\frac{(x - 1) - x}{(x - 1)^2} \right] = \frac{-3x^2}{(x - 1)^4}$$

عندما x تساوي 2 , $\frac{dy}{dx} = -12$ وعليه فان معادلة المماس تكون

$$y - 8 = -12(x - 2)$$

أو

$$12x + y - 32 = 0$$

اذا كان y يعتمد على z وليكن

$$y = f(z)$$

وكان z يعتمد على x وليكن

$$z = g(x)$$

فان y بصورة غير مباشرة دالة للمتغير x . اذا استبدلت z في $f(z)$ بمساويتها $g(x)$

فان

$$(1) \quad y = f(g(x))$$

ولقد تم التعبير عن y الآن بصورة مباشرة كدالة للمتغير x . مثلاً

$$(2)\quad y = f(z) = z^3 ,\ z = g(x) = 2x^2 - x + 1$$

فان

$$(3)\quad y = f(g(x)) = (2x^2 - x + 1)^3 .$$

يمكن ايجاد $D_x y$ بتفاضل (1) مباشرة . في مثالنا عندنا من (3) .

$$(4)\ D_x y = 3(2x^2 - x + 1)^2 (4x - 1)$$

كطريقة أخرى يمكن ايجاد $D_x y$ في (1) بدون اجراء عملية التعويض وذلك باستخدام قاعدة السلسلة .

$$(5)\ D_x y = f'(z)\, g'(x) .$$

باستخدام رموز التفاضل يمكن كتابة هذه القاعدة بشكل

$$(6)\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}$$

اذا وجدنا المشتقة في مثالنا حسب هذه القاعدة فيكون عندنا من (2)

$$(7)\ \frac{dy}{dx} = 3z^2 (4x - 1)$$

يمكن ترك الجواب بصيغة تحتوي x و z أو اذا شئنا يمكن استبدال z بما تساويها $2x^2 - x + 1$ وهذا يعطي الجواب في (4) . لايجاد قيمة $\frac{dy}{dx}$ من (7) عندما تكون $x = 1$ ، نرى ان $z = 2$ عندما تكون $x = 1$ وعليه فان

$$\frac{dy}{dx} = 3(4)(3) = 36$$

(١٣ ـ ٥) مشتقة الدوال الجبرية :

ان قاعدة القوة

$$Dx^{n} = nx^{n-1}$$

التي أثبتنا صحتها للاعداد الصحيحة n تعتبر أيضاً صحيحة للأعداد النسبية ويمكن استخدامها لايجاد مشتقة $x^{3/5}$ مثلاً

لأي عدد نسبي r	$Dx^{r} = rx^{r-1}$

نبرهن هذه القاعدة للحالة الخاصة

$$r = \frac{1}{m}$$

حيث m عدد صحيح موجب .

لنفرض ان

$$g(x) = x^{\frac{1}{m}}$$

برفع الطرفين الى القوة m نحصل على

$$g^{m}(x) = x$$

بأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة الى x نحصل على

$$D_{x}g^{m}(x) = D_{x}x$$

أو

$$mg^{m-1}(x)\,g'(x) = 1$$

اذا

$$m(x^{\frac{1}{m}})^{m-1}g'(x) = 1$$

أو

$$mx^{1-\frac{1}{m}}g'(x) = 1$$

أو

$$g'(x) = \frac{1}{m}\,\frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$$

أو

$$g'(x) = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

بالتعويض عن قيمة $\frac{1}{m}$ نحصل على

$$g'(x) = r x^{r-1}$$

هذا يثبت صحة القاعدة عندما تكون

$$r = \frac{1}{m}$$

بقي علينا ان نثبت القاعدة لأي عدد نسبي r . نفرض ان

$$r = \frac{n}{m}$$

$$Dx^r = Dx^{\frac{n}{m}} = D(x^{\frac{1}{m}})^n = n(x^{\frac{1}{m}})^{n-1} Dx^{\frac{1}{m}}$$

$$= n(x^{\frac{1}{m}})^{n-1} \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = n x^{\frac{n-1}{m}} \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

$$= \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} = r x^{r-1}$$

وكما هو معروف فان$0 \neq x$ عندما تكون$1 > r$

كمثالين على هذه القاعدة هما

$$D x^{3/5} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{2/5}}$$

$$D \frac{3}{2\sqrt{x}} = D \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

قاعدة القوة المعممة

اذا كان للدالة $g(x)$ مشتقة في x فكذلك للدالة $g^r(x)$ مشتقة في x وذلك لأي عدد نسبي r و

$$D g^r(x) = r g^{r-1}(x) D g(x)$$

البرهان :

ضع

$$z = g(x)\ , f(z) = z^{r}$$

اذا

$$g^{r}(x) = f(g(x))$$

بما ان

$$f'(z) = rz^{r-1}$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نجد ان

$$Dg^{r}(x) = D_{x} f(g(x)) = f'(z)\, g'(x)$$

$$= rz^{r-1} g'(x) = rg^{r-1}(x)\, g'(x)$$

وهو المطلوب .

مثال «١» :

أوجد

$$D\sqrt{x^{2}-1}$$

الحل :

عندما يحتوي المقدار اللازم اشتقاقه على جذر ، من الأفضل اعادة كتابة المقدار باستعمال الأسس الكسرية .

اذا باستخدام

$$g(x) = x^{2} - 1\ , r = \frac{1}{2}$$

نحصل على

$$D\sqrt{x^{2}-1} = D(x^{2}-1)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^{2}-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

مثال «٢» :

أوجد مشتقة

$$\frac{x^3}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$$

الحل :

نبدأ اولاً باستخدام قاعدة خارج القسمة .

$$D\ \frac{x^3}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}} = \frac{(1-3x)^{2/3}\ 3x^2 - x^3\ D(1-3x)^{2/3}}{(1-3x)^{4/3}}$$

يمكن ايجاد مشتقة $(1-3x)^{2/3}$ باستخدام قاعدة القوة المعممة . لنجد ان

$$D\ \frac{x^3}{(1-3x)^{2/3}} = \frac{(1-3x)^{2/3}\ 3x^2 - x^3\ 2/3\,(1-3x)^{-1/3}\cdot(-3)}{(1-3x)^{4/3}}$$

وبكتابة جميع المقادير ذات الأسس السالبة بأسس موجبة ثم تبسيط الكسر الناتج نجد أن :

$$D\ \frac{x^3}{(1-3x)^{2/3}} = \frac{(1-3x)^{2/3}\ 3x^2 + \dfrac{2x^3}{(1-3x)^{1/3}}}{(1-3x)^{4/3}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1-3x)\ 3x^2 + 2x^3}{(1-3x)^{1/3}}}{(1-3x)^{5/3}} = \frac{3x^2 - 7x^3}{(1-3x)^{5/3}}$$

$$= \frac{x^2(3-7x)}{(1-3x)^{5/3}}$$

المشتقة $f'(x)$ لدالة f هي عدد يعتمد على x . لذلك فانها تمثل علاقة تربط بين العدد $f'(x)$ والعدد x لجميع النقاط $(x, f'(x))$ التي تكون المشتقة معرّفة عندها . وتسمى هذه العلاقة دالة المشتقة Derivative function أو بالدالة المشتقة Derived function للدالة f ويرمز لها بالرمز f' . نطاق الدالة f' قد يكون أصغر من نطاق الدالة f وذلك لأن المشتقة f'

قد لا تكون موجودة لجميع قيم x الموجودة في نطاق الدالة f . وكأية دالة أخرى ، الدالة f' قد يكون أو قد لا يكون لها مشتقة في x . اذا كانت مشتقة الدالة f' في x موجودة نسميها المشتقة الثانية للدالة f في x ونقول ان للدالة مشتقة من المرتبة الثانية في x . ويرمز لها بالرمز $D^2 f(x)$ أو $f''(x)$. اذا استخدم الترميز

$$y = f(x)$$

فهناك رموز مختلفة للمشتقة الثانية منها

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} . \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad , y'' , f''(x)$$

مثال «٣» :

اذا كان

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 6$$

فأوجد $f''(2), f'(2)$

الحل :

نجد أولاً $f''(x), f'(x)$

$$f'(x) = Df(x) = D(x^4 + 3x^2 - 6) = 4x^3 + 6x$$

$$f''(x) = D^2f(x) = Df'(x) = D(4x^3 + 6x) = 12x^2 + 6$$

وعليه فان

$$f'(2) = 44 \quad f''(2) = 54$$

عندما يكون لدالة المشتقة الثانية f'' مشتقة في x تسمى المشتقة الثالثة لـ f في x . ويشار إليها بأحد الرموز

$D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $d^3 f(x)/dx^3$, etc.

بالمثل قد تكون هناك مشتقات من المرتبة الرابعة ، الخامسة ، السادسة أو أعلى من ذلك

مثال «٤» :

اذا كان

$$f(x) = 4x^3 - \frac{2}{x}$$

فأوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة

الحل :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^{-1},$$

$$f'(x) = Df(x) = 12x^2 + 2x^{-2},$$

$$f''(x) = D^2 f(x) = Df'(x) = 24x - 4x^{-3},$$

$$f'''(x) = D^3 f(x) = Df''(x) = 24 + 12x^{-4},$$

$$f^{(4)}(x) = D^4 f(x) = Df'''(x) = -48x^{-5}.$$

وعموماً

$$f^{(n)}(x) = D^n f(x)$$

تعني المشتقة رقم n للدالة $f(x)$ ، أي أن $f^n(x)$ هي الدالة الناتجة من تفاضل الدالة $f(x)$ n من المرات

تمارين (٤) :

أوجد كلا من المشتقات الآتية وبسط الناتج :

1. $(x^2 + 3)^5$.
2. $(x^3 - 3x)^4$.
3. $(3x^2 + 5)^{17} - \frac{2}{3}x^2$
4. $(1 + u^2)^{-2}$.
5. $\frac{1}{x^2 - 3x - 4}$
6. $(u + \frac{1}{u})^2$.
7. $(x^2 - \frac{1}{x})^3$.
8. $(x + 1)^3(6x - 2)^4$.
9. $(3 - 5x - x^2)^3 (2 + x + 4x^2)^2$.
10. $(ax + b)^{-1}$
11. $\frac{1}{(3 - x^2)^3}$
12. $[(2x + 1)(x^2 - 3x)]^2$.

13. $(y - \frac{1}{y})^2 - y^2 - y^{-2}$. 14. $(t^2-1)(t-\frac{1}{t})$. 15. $u^2(u-1)^{-4}$.

16. $(6y+1)^4(y-7)^{-5}$

17. $(2x-1)^3(x^2+5x)+17x$.

18. $(3x-1)^2(x+2)+(3x-1)(x+2)^2$.

19. $\frac{(1-x)^3}{2-3x}$

20. $\frac{a(2z-1)}{(4z+1)^2}$

21. $(\frac{\upsilon+2}{\upsilon-2})^2$.

22. $\left(\frac{1-8x}{1+8x}\right)^4$.

23. $(\frac{x}{a^2-z^2})^{-3}$.

24. $\left(\frac{a}{b+cx}\right)^n$ عدد صحيح n

25. $(x-2)^3(x+5)^4(x+1)^2$.

26 . أوجد معادلة المماس للمنحني $y = (1+2x^2)^3$ عند النقطة $(1,27)$.

ـ اوجد القيم التي تكون عندها المشتقات للمقادير الآتية تساوي صفراً

27. $(x^2-1)^2(x+1)$.

28. $(2r+1)^2(r-3)^3$.

29. $x^5(ax+b)^4, a \neq 0$.

30. $\frac{(x+3)^2}{x}$.

31. $\left(\frac{1-8y}{1+8y}\right)^4$.

32. $f(r) = \pi \frac{H}{R} r^2(R-r)$, مقداران ثابتان R,H

33. $g(h) = \pi \frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h$, مقداران ثابتان R,H

في كل من الآتي y دالة غير مباشرة في x أوجد dy/dx أولاً باستخدام قاعدة السلسلة ثم بالتعبير عن y مباشرة بدلالة x ثم ايجاد التفاضل

34. $y = z^2 + 3z - 2, z = 2x + 4.$

35. $y = u^2 - 2u^{-1}, u = 5x.$

36. $y = \frac{t^2}{t-1}, t = \frac{x-1}{x}.$

37. $y = \frac{t}{3t+2}, t = \frac{2x}{1-3x}$

(١٣ ـ ٦) الدوال الأسية واللوغاريتمية :

١ ـ مقدمة :

تلعب الدوال الأسية واللوغاريتمية دوراً مهماً في كثير من مجالات المعرفة ، في الرياضيات والعلوم الطبيعية وفي مجالات الاقتصاد والادارة . نبدأ اولاً بمراجعة سريعة للأسس وقوانينها .

اذا كان a أي عدد حقيقي فان

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a.a$$

$$\vdots$$

وبصورة عامة

$$a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{n \text{ من العوامل}}$$

في التعبير a^n يسمى a بالأساس (base) و n بالأس (exponent) . فيما يلي بعض الأمثلة التوضيحية :

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$$

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

يمكن استخدام الصفر كأس وذلك بتعريف

$$a^0 = 1 \ , \ a \neq 0$$

لاحظ ان 0^0 غير معرف .

يمكننا تعميم عملية رفع الأعداد الى أس عدد سالب وذلك بعد استخدام التعريف التالي :

لكل عدد صحيح موجب n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} , a \neq 0$$

فمثلاً

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = -\frac{1}{343}$$

$$(\frac{1}{2})^{-5} = 1/(\frac{1}{2})^5 = 1/(\frac{1}{32}) = 32$$

والآن لكل عدد موجب صحيح n نعرف

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

على شرط ان يكون الجذر في الجهة اليمنى عدد حقيقي . فلا يكون الجذر عدداً حقيقياً اذا كان n عدداً زوجياً موجباً و a عدداً سالباً . وعليه فان $\sqrt{-3}$ عدد غير حقيقي وعليه فان المقدار $(-3)^{1/2}$ غير معرف . فيما يلي بعض الأمثلة الأخرى .

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

غير معرف

$$(-4)^{\frac{1}{4}}$$

$$(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

وأخيراً اذا كان كل من m عدداً صحيحاً و n عدداً صحيحاً موجباً فاننا نعرف

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

على شرط ان يكون الجذر في الجهة اليمنى معرّفاً . فيما يلي بعض الأمثلة

$$25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = 5^3 = 125$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$(-27)^{\frac{4}{3}} = ((-27)^{\frac{1}{3}})^4 = (-3)^4 = 81$$

$$(-2)^{\frac{3}{2}} = ((-2)^{\frac{1}{2}})^3$$ غير معرّف

ويمكن تعميم مفهوم الأسس الى جميع الأعداد الحقيقية سواء كانت نسبية أو غير نسبية . وفي جميع هذه الحالات يمكن استخدام الخواص التالية للأسس :

خواص الاسس

اذا كان كل من a و b عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من y,x عدداً حقيقياً فان

(a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(b) $a^x / a^y = a^{x-y}$

(c) $(a^x)^y = a^{xy}$

(d) $a^x b^x = (ab)^x$

٢ ـ الدوال الأسية :

اذا كان a عدداً حقيقياً موجباً و $a \neq 1$ فان الدالة

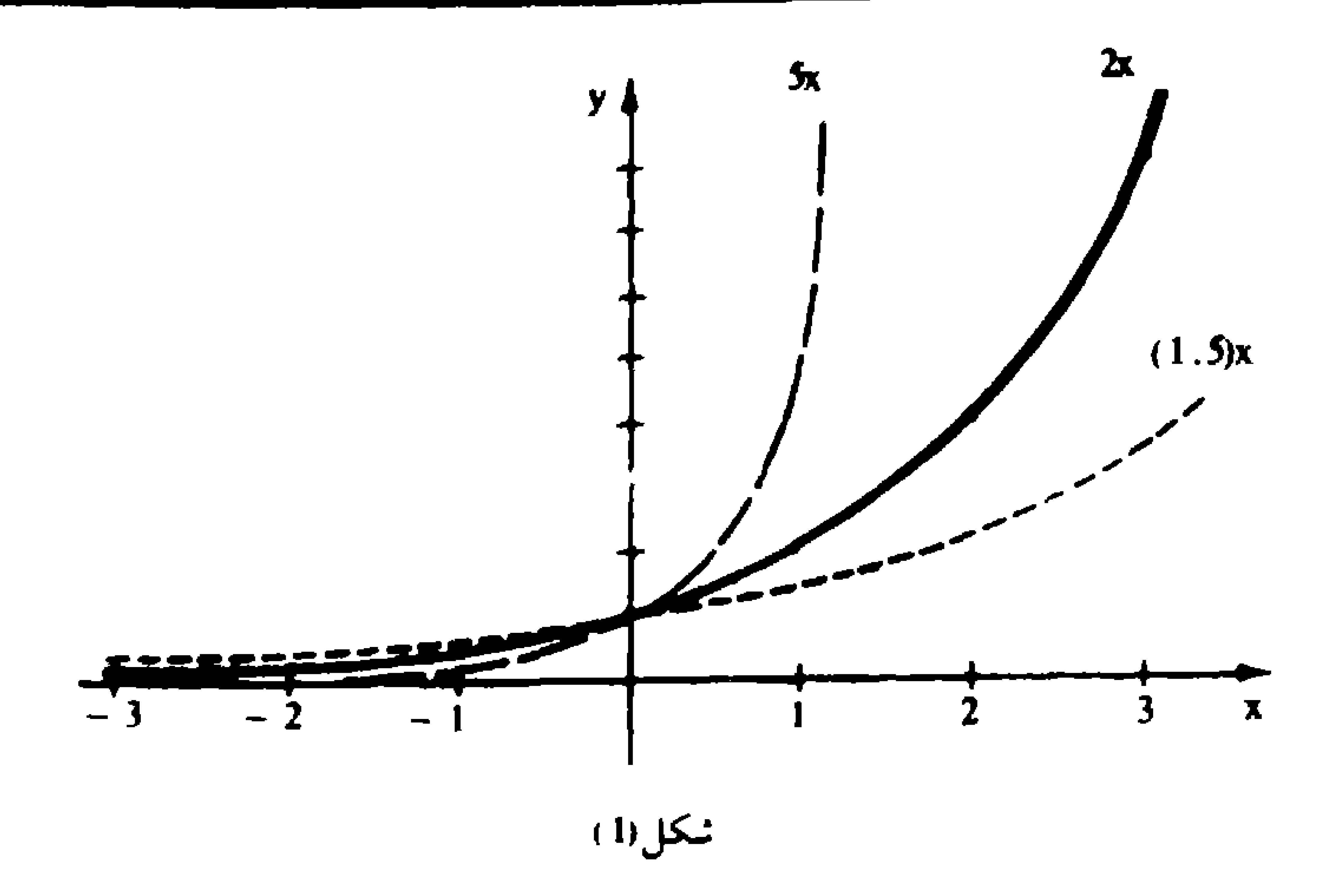
$$f(x) = a^x$$

تسمى دالة أسية أساسها العدد a .

الرسوم البيانية للدوال

$$f(x) = a^x \quad a > 1$$

مرسومة في شكل(1)



شكل (1)

٣ ـ الدوال اللوغاريتمية :

قبل أن نتكلم عن الدوال اللوغاريتمية نقدم نبذة موجزة عن اللوغاريتمات . يعرف اللوغاريتم كما يلي :

تعريف اللوغاريتم

اذا كان $a > 0$ و $a \neq 1$ و x عدد موجب ، فان لوغاريتم العدد x للأساس a هو العدد b الذي اذا رفع اليه الأساس a لكان الناتج العدد x . وبالرموز يقال ان

$$\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x$$

مثال (١) :

(a) $\log_2 8 = 3$

وذلك لأن $2^3 = 8$

(b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

وذلك لأن $3^{-2} = \frac{1}{9}$

(c) $\log_a 1 = 0 , a > 0$

وذلك لأن $a^0 = 1$

يمكن تلخيص خواص اللوغاريتمات بما يلي :

خواص اللوغاريتمات

اذا كان كل من a و x و y عدداً حقيقياً و $a > 0$ و $a \neq 1$ فان

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

لقد مرت عليك جداول اللوغاريتمات للأساس 10 والتي تسمى باللوغاريتمات الاعتيادية Common logarithms وقد يتبادر الى ذهنك ان فائدة اللوغاريتمات في اجراء العمليات الحسابية قد اضمحلت الآن بسبب وجود الآلات الحاسبة والكمبيوتر . هذا غير صحيح فان فائدتها أهم في دوال تعرف بالدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية التي أساسها a, ($a > 0$ و $a \neq 1$) هي الدالة المعرفة على فئة الأعداد الموجبة كما يلي :

$$f(x) = \log_a x$$

ومن الواضح ان هذه العلاقة مرتبطة ارتباطاً قوياً بالدالة الأسية التي أساسها a حيث ان

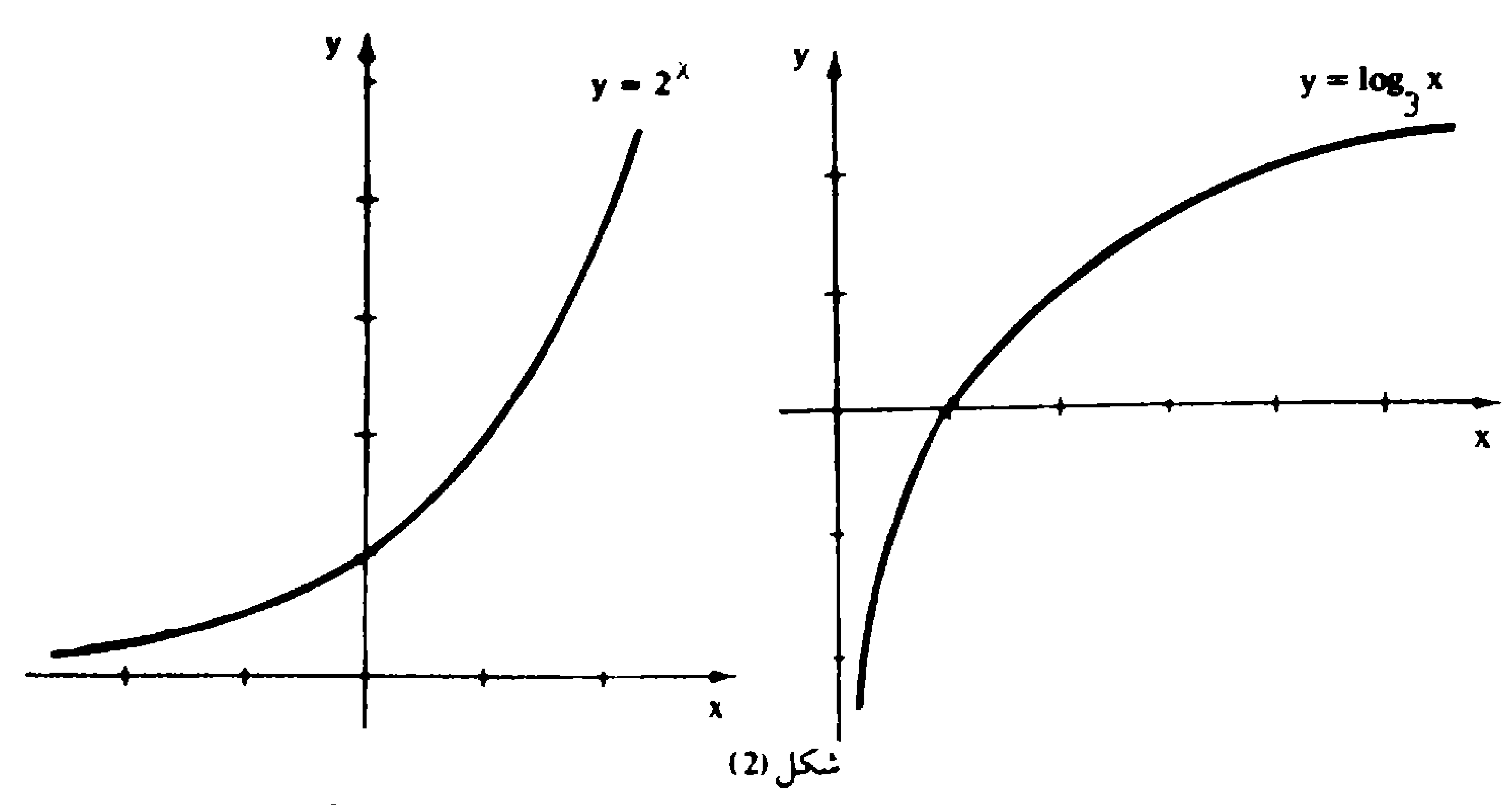
$$y = \log_a x$$

مكافئة للعلاقة

$$x = a^y$$

ويظهر من هذا ان الدالة اللوغاريتمية التي أساسها a هي عكس الدالة الأسية التي أساسها a . وعليه فان دراسة الدوال الأسية مرتبطة ارتباطاً قوياً بدراسة الدوال اللوغاريتمية .

فيما يلي الرسم البياني للدالة اللوغاريتمية التي أساسها 2 والرسم البياني للدالة الأسية التي أساسها 2 .



شكل (2)

هناك عدد غير نسبي يرمز له بالرمز e وقيمته التقريبية هي تقريباً

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

وهو مهم جداً عند استخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية . وأهمية العدد e لهذه الدوال كأهمية النسبة الثابتة π بالنسبة للدوال المثلثية . ان الدالة الأسية التي أساسها e لها خواص مهمة وكذلك لمعكوسها الدالة اللوغاريتمية التي أساسها e . فيطلق على الدالة الأولى اسم الدالة الأسية فقط نظراً لأهميتها ويطلق على لوغاريتمات الأعداد للاساس e اسم اللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithms . ويرمز للوغاريتم الطبيعي للعدد x بالرمز lnx بدلاً من $\log_e x$.

٤ ـ مشتقة الدوال الأسية :

نجد الأن مشتقة الدالة الأسية

نظرية (١) :

اذا كانت

$$f(x) = e^x$$

فان

$$f'(x) = e^x$$

البرهان :

لايجاد المشتقة تستخدم قاعدة تعريف المشتقة كما يلي :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x} . e^{h} - e^{x}}{h}$$

بما ان المقدار e^x لا يعتمد على h فيمكن اعتباره ثابتاً بالنسبة الى h وعليه باستخدام خواص النهايات نحصل على

$$f'(x) = e^{x} \lim_{h \to 0} \frac{e^{h} - 1}{h}$$

ويمكن اثبات ان

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{h} - 1}{h} = 1$$

وعليه فان

$$f'(x) = e^{x}$$

وهذا يعني ان مشتقة الدالة الأسية e^x هي نفسها وهو المطلوب . باستخدام قاعدة السلسلة نحصل على النتيجة التالية :

اذا كانت

$$f(x) = e^{u(x)}$$

فان

$$f'(x) = e^{u(x)} u'(x)$$

نظرية2 :

اذا كانت

$$y = a^{x}, a > 0$$

فان

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

البرهان :

باستخدام خواص اللوغاريتمات يمكن كتابة a^x بالشكل التالي :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

وعليه فان

$$y = e^{u(x)}$$

حيث

$$u(x) = x \ln a$$

اذا

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx} (x \ln a)$$

$$= (e^{x \ln a})(\ln a)$$

Thus,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a \ldots$$

وهو المطلوب .

وكنتيجة لهذه النظرية وقاعدة السلسلة نستنتج ما يلي :

اذا كانت

$$f(x) = a^{u(x)}$$

فان

$$f'(x) = a^{u(x)} u'(x) \ln a$$

مثال «٢» :

أوجد مشتقة

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

(الحل) :

$$\frac{dy}{dx} = e^{u(x)} . u'(x)$$

$$= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

مثال «٣» :

أوجد مشتقة $y = x^2 e^{2x}$.

(الحل) :

باستخدام قانون حاصل الضرب نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2x} \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 e^{2x} \frac{d}{dx}(2x) + 2xe^{2x}$$

$$= x^2 e^{2x} 2 + 2xe^{2x}$$

$$= 2xe^{2x}(x + 1)$$

تمارين (٥) :

أوجد مشتقة كل مما يأتي :

1. $y = e^{3x}$
2. $y = 4e^{5x}$
3. $y = e^{x^2}$
4. $y = e^{x^2 + 2x}$
5. $y = e^{2x^2 + 3x + 1}$
6. $y = e^{3x^2 - 4x}$

12. $y = e^{\sqrt{2x^2+1}}$
13. $y = x(10)^x$
14. $y = (x + 2)e^{-x}$
15. $y = x^2 e^{\sqrt{x}} \quad x \geqslant 0$
16. $y = x^2 (8)^{3x}$
17. $y = (x^2 + 1)e^{4x}$

7. $y = e^{\sqrt{x+1}}$ $\quad x \geq -1$

8. $y = e^{\sqrt{2x+3}}$ $\quad x \geq \frac{-3}{2}$

9. $y = e^{x\sqrt{x-1}}$ $\quad x \geq 1$

10. $y = e^{x\sqrt{x+1}}$ $\quad x \geq -1$

11. $y = e^{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad |x| \geq 1$

18. $y = (x+1)^2 (10)^{4x}$

19. $y = \dfrac{a^x}{1 + a^x}$

20. $y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}$

21. $y = \dfrac{200}{1 + 10e^{(0.3)x}}$

22. $y = \dfrac{5,000}{1 + 30e^{(0.5)x}}$

٥ ـ مشتقة الدوال اللوغاريتمية :

يمكن ايجاد مشتقة أية دالة لوغاريتمية باستخدام الدالة الاسية المكافئة لها .

نظرية1

اذا كانت $y = \ln x$

فان $y' = \frac{1}{x}$

البرهان :

لاحظ أن $y = \ln x$

و $e^y = x$

علاقتان متكافئتان . بتفاضل طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة الى x واستخدام قاعدة السلسلة نحصل على

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

بالتعويض عن قيمة e^y نحصل على

$$x \frac{dy}{dx} = 1$$

اذا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وهو المطلوب .

كنتيجة لهذه النظرية وباستخدام قاعدة السلسلة نحصل على ما يلي :

اذا كانت $y = \ln u(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

مثال « ٤ » :

أوجد مشتقة

$$y = \ln(1 + x^2)$$

(الحل)

ان هذه الدالة من نمط

$$y = \ln u(x)$$

حيث

$$u(x) = 1 + x^2$$

وهذا يعطي

$$u'(x) = 2x$$

وباستخدام النتيجة الأخيرة نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

مثال « ٥ » :

أوجد مشتقة

$$y = \ln(1 + e^{3x})$$

(الحل)

عندما

$$u(x) = 1 + e^{3x}$$

$$u'(x) = \frac{d}{dx}(1 + e^{3x}) = 3e^{3x}$$

وعليه فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}}$$

مثال « ٦ » :

أوجد مشتقة

$$y = \ln\sqrt{x}, x > 0$$

(الحل)

باستخدام خواص اللوغاريتمات نحصل على

$$y = \ln \sqrt{x}$$
$$= \ln x^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \ln x$$

اذا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2x} \text{ ، } x > 0$$

مثال « ٧ » :

أوجد مشتقة

$$y = (\ln x) / x, x > 0$$

(الحل)

باستخدام قاعدة القسمة نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x) \cdot \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x \cdot (\frac{1}{x}) - (\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0$$

مثال « ٨ » :

أوجد مشتقة

$$y = e^{2x} . \ln x , x > 0$$

(الحل)

باستخدام قاعدة حاصل الضرب نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^{2x})$$

$$= e^{2x}\frac{1}{x} + \ln x \,.\, e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= e^{2x}\frac{1}{x} + (\ln x)\, 2e^{2x}$$

$$= e^{2x}\left(\frac{1}{x} + 2\ln x\right)$$

مثال « ٩ » :

أوجد مشتقة

$$y = \ln\left[x(x+1)/(x+2)^2\right], x > 0$$

(الحل)

$$y = \ln\left[\frac{x(x+1)}{(x+2)^2}\right]$$

$$= \ln(x) + \ln(x+1) + \ln(x+2)^2$$

$$= \ln(x) + \ln(x+1) - 2\ln(x+2)$$

نأخذ التفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}$$

$$= \frac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}$$

سنبين فيما يلي سهولة ايجاد مشتقة حواصل الضرب أو خارج القسمة باستخدام اللوغاريتمات .

مثال « ١٠ » :

أوجد مشتقة

$$y = x\sqrt{x+1} / \sqrt{x+3}, x > 0$$

(الحل)

نأخذ لوغاريتم الطرفين ثم نبسط المقدار باستخدام خواص اللوغاريتمات

$$\ln y = \ln \left[\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} \right]$$

$$= \ln x + \ln\sqrt{x+1} - \ln\sqrt{x+3}$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x+3)$$

نأخذ تفاضل الطرفين بالنسبة الى x ونستخدم قاعدة السلسلة فنحصل على

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$= \frac{x^2 + 5x + 3}{x(x+1)(x+3)}$$

إذا

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{(x^2 + 5x + 3)}{x(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}\frac{(x^2 + 5x + 3)}{x(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{(x^2 + 5x + 3)}{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال « ١١ » :

أوجد مشتقة

$$y = x^x, x > 0$$

(الحل)

نأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$\ln y = \ln(x^x)$$

$$= x \ln x$$

نأخذ تفاضل الطرفين بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{x} + \ln x$$

$$= 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

$$= xx(1 + \ln x)$$

تمارين (٦) :

أوجد مشتقة كل مما يأتي :

1. $y = \ln(x + 1)$
2. $y = \ln(2x + 3)$
3. $y = \ln\sqrt{x + 1}$
4. $y = \ln\sqrt{2x + 3}$
5. $y = \ln(x\sqrt{x + 1})$
6. $y = \ln\sqrt{x^2 + 1}$
7. $y = \ln(\ln x)$
8. $y = \ln(\ln\sqrt{x + 1})$
9. $y = x^2 \ln 3x$
10. $y = x^3 \ln\sqrt{x + 2}$
11. $y = \ln\ xe^x$
12. $y = \ln(x^2 e^{2x})$
13. $y = \ln(x^x)$
14. $y = \ln(1 + e^{2x})$
15. $y = \ln\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$
16. $y = \ln\left(\frac{e^{2x}}{1 + x}\right)$

17. $y = \dfrac{e^x + 1}{2\ln x}$

18. $y = \dfrac{a}{1 + \ln kx}$

19. $y = \dfrac{200}{1 + 10e^{0.3x}}$

20. $y = \dfrac{5{,}000}{1 + 30e^{0.5x}}$

21. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

22. $y = \dfrac{\ln\sqrt{x + 1}}{x + 3}$

23. $y = \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)$

24. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x - 3}{x - 4}}$

25. $y = \ln\sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 1}}$

26. $y = \ln\left[\dfrac{(x + 1)(2x - 1)}{3x + 4}\right]$

27. $y = \dfrac{x(x + 2)}{\sqrt{x + 1}}$

28. $y = \dfrac{x\sqrt{x + 2}}{x + 3}$

29. $y = \dfrac{x(x + 2)^2}{\sqrt{x + 3}}$

30. $y = \dfrac{(x + 1)^2(x + 3)^3}{(2x + 1)}$

31. $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\ \sqrt{x+2}}{(3x + 2)^2}$

32. $y = \dfrac{\sqrt{3x + 2}\,(x + 4)}{(4x + 5)^2}$

33. $y = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

34. $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x + 1}}{x + 2}}$

35. $y = (x+1)^{x+1}$

36. $y = (x + 2)^x$

37. $y = (2x + 3)^x$

38. $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

39. $y = (\ln x)^{\ln x}$

40. $y = (\sqrt{x + 1})^{x+2}$

الباب الرابع عشر

تطبيقات التفاضل

يهتم هذا الباب بدراسة تطبيقات التفاضل في ايجاد النهايات العظمى والصغرى ونقاط الانقلاب واستخدامها في دراسة الدوال دراسة تحليلية تمكّننا من تمثيل الدوال بيانياً بطرق أكثر دقة من الطرق التي عرضت في بداية هذا الكتاب . كما يتناول هذا الباب بعض التطبيقات العملية للنهايات العظمى والصغرى .

(١٤ ـ ١) النهايات العظمى والصغرى :

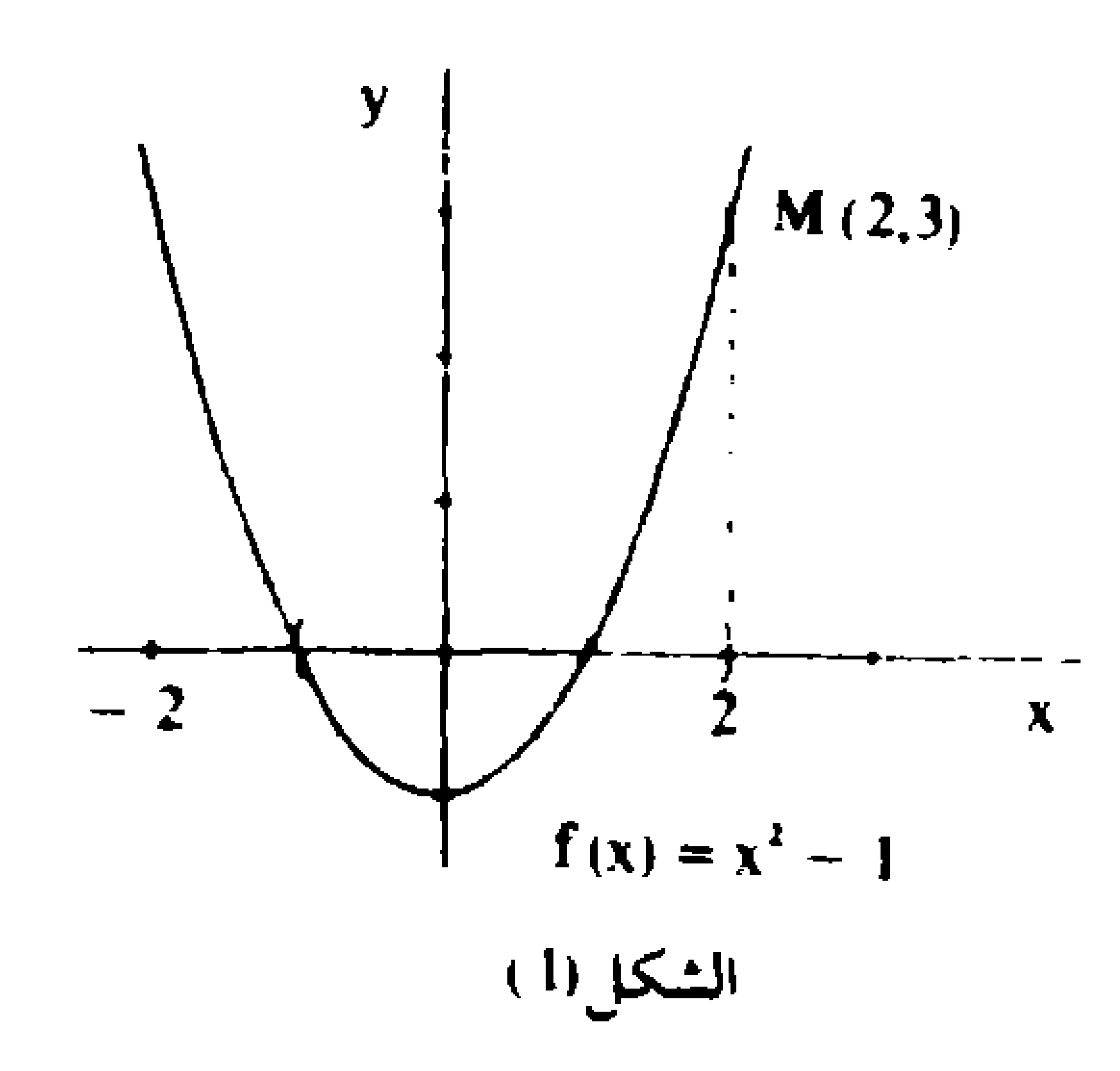
مهندس الطيران يصمم جناح الطائرة ليحصل على أكبر مقدار من القوة الرافعة . من الاعتبارات الرئيسية لمنتج هو الوصول الى أقل تكلفة ممكنة لمنتجاته . حل مثل هذه المسائل يتضمن الحصول على أقل أو أكبر قيمة ممكنة لدالة . المشتقة هنا اداة قوية في حل مثل هذه المسائل . الجزء الأول من هذا الباب يتعلق بالنهايات العظمى والصغرى والمسائل التي تتعلق برسم المنحنيات . وفي الجزء الأخير نهتم بحل المسائل العملية باستخدام التفاضل .

الدالة f المعرّفة بـ

$$f(x) = x^2 - 1$$

مرسومة في الشكل (1) . اذا حصرنا اهتمامنا في قيم x في الفترة المغلقة $[-1,2]$ نرى ان أعلى نقطة في المنحنى هي $(2,3)$ وأدنى نقطة هي $(0,-1)$. هذا يعني ان لجميع قيم x في $[-1,2]$.

$$f(x) \geq f(0) = -1 , f(x) \leq f(2) = 3$$



الشكل (1)

تعريف «١» :

لتكن f دالة معرّفة في الفترة $I = [a,b]$. النقطة $M(c,f(c))$ تسمى نقطة نهاية عظمى لمنحني الدالة f في I اذا كان c في I وكان

$$f(x) \leq f(c)$$

لجميع قيم x في I . يسمى $f(c)$ (الاحداثي y للنقطة M) بقيمة النهاية العظمى أو النهاية العظمى للدالة f في I ، ويقال ان للدالة نهاية عظمى عند c .

وتعرف نقطة النهاية الصغرى وقيمة النهاية الصغرى أو النهاية الصغرى بطريقة مماثلة وسيترك ذلك للقارىء .

النهاية العظمى للدالة

$$f(x) = x^2 - 1$$

في الفترة $[-1,2]$ هي 3 وتكون عند النقطة 2 . والنهاية الصغرى هي -1 وتحدث عند 0 . لاحظ ان النهاية العظمى أو النهاية الصغرى يقال انها تحدث عند الاحداثي x لنقطة النهاية العظمى أو نقطة النهاية الصغرى على التوالي ، وقيمة النهاية العظمى أو الصغرى هي قيمة y المناظرة .

تعريف «٢» :

يسمى العدد c قيمة حرجة للدالة f اذا كان

$$f'(c) = 0$$

فمثلاً 0 قيمة حرجة للدالة

$$f(c) = x^2 - 1$$

القيم الحرجة للدالة تساعدنا في ايجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة كما هو واضح من النظرية التالية التي نذكرها بدون برهان .

نظرية «١» :

اذا كانت f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ فان للدالة نهاية عظمى ونهاية صغرى وأن كلا منهما تقع اما في قيمة حرجة واما في احدى نهايتي الفترة .

مثال «١» :

أوجد النهاية العظمى والنهاية الصغرى في الفترة $[-1,3]$ للدالة

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

الحل :

بما ان الدالة كثيرة حدود ، لذا فانها دالة مستمرة وباستخدام نظرية «١» يكون للدالة نهايتان عظمى وصغرى في نقطة حرجة أو نقطة نهاية الفترة .

لايجاد القيم الحرجة نعبر عن مشتقة الدالة كحاصل ضرب

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x + 2)(x - 2)$$

القيم الحرجة الوحيدة هي قيم x التي تحقق المعادلة

$$f'(x) = 0$$

أي انها

$$0, -2, 2$$

نحسب الآن قيم $f(x)$ لقيم x التي تساوي

$$-1, 0, 2, 3$$

$$f(-1) = -7, f(0) = 0, f(2) = -16, f(3) = 9$$

أما قيمة x التي تساوي -2 فانها تهمل لعدم وقوعها في الفترة $[-1,3]$. النهاية العظمى والصغرى للدالة f في $[-1,3]$ هما أكبر وأصغر قيمة في هذه القيم على التوالي .

النهاية العظمى هي 9 وتقع عند 3 ، والنهاية الصغرى هي -16 وتقع عند 2 .

مثال «٢» :

أوجد النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 5$$

في الفترة $[-1,8]$.

الحل :

لاحظ ان الدالة معرفة في جميع الفترة $[-1,8]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 24x + 21 \\ &= 3(x^2 - 8x + 7) \\ &= 3(x - 1)(x - 7) \end{aligned}$$

النهايات العظمى والصغرى واقعة اما عند احدى نقطتي نهاية الفترة1 − ,8 واما عند النقطة1 أو عند7 .

وبايجاد قيمة الدالة في كل من هذه النقاط نجد ان

$$f(-1) = -29$$

$$f(1) = 15$$

$$f(7) = -93$$

$$f(8) = -83$$

اذا النهاية العظمى تحدث في

$$x = 1$$

تحدث النهاية الصغرى في

$$x = 7$$

(١٤ - ٢) الدوال التزايدية والتناقصية :

عند رسم منحني دالة يهمنا عادة الشكل العام للمنحني والمعالم البارزة ، ولا حاجة لنا الى دقة كبيرة في الرسم في أغلب الاوقات يكفي رسم تمهيدي للمنحني اذا علم أين يكون المنحني صاعداً وأين يكون هابطاً . والاصطلاحان صاعد وهابط يشيران دائماً الى سلوك المنحني عند أي نقطة تتحرك عليه من اليسار الى اليمين . قبل ان نعرف أين يكون المنحني صاعداً وأين يكون هابطاً ينبغي ان نعرف معنى هذه الاصطلاحات . ان بديهيتنا تخبرنا ان أي جزء من المنحنى يكون صاعداً فقط اذا كان لكل نقطتين واقعتين على المنحني في ذلك الجزء تكون النقطة التي على اليمين أعلى من النقطة التي على اليسار . اذا كانت معادلة الدالة

$$y = f(x)$$

فان هذا يعني ان

$$f(x_1) < f(x_2)$$

اذا كان

$$x_1 < x_2$$

وسوف يكون هذا تعريفنا . وعندما نتكلم عن دوال بدلاً من منحنيات ، فمن المعتاد ان نستعمل كلمة تزايدية increasing وتناقصية decreasing بدلاً من صاعد rising وهابط falling .

تعريف «٣» :

لتكن f دالة معرفة في الفترة I

(١) f تزايدية في I تعني ان

$$f(x_1) < f(x_2)$$

لجميع

x_1, x_2 في I و $x_1 < x_2$

(٢) f تناقصية في I تعنى ان

$$f(x_1) > f(x_2)$$

لجميع x_1, x_2 في I و $x_1 < x_2$

تستخدم النظرية التالية في ايجاد النقاط التي تكون فيها الدالة تزايدية والنقاط التي تكون فيها تناقصية . نذكر هذه النظرية بدون برهان .

نظرية «٢» :

لتكن الدالة f مستمرة في الفترة I .

(١) اذا كان

$$f'(x) > 0$$

لجميع قيم x الواقعة داخل الفترة I ، فان f تزايدية في I

(٢) اذا كان

$$f'(x) < 0$$

لجميع قيم x الواقعة داخل الفترة I فان f تناقصية في I .

مثال «١» :

أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

تزايدية والفترات التي تكون فيها تناقصية

الحل :

نوجد أولاً القيم الحرجة للدالة f . يمكن الحصول على القيم الحرجة بكتابة $f'(x)$ كحاصل ضرب

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$$

وبوضع

$$f'(x) = 0$$

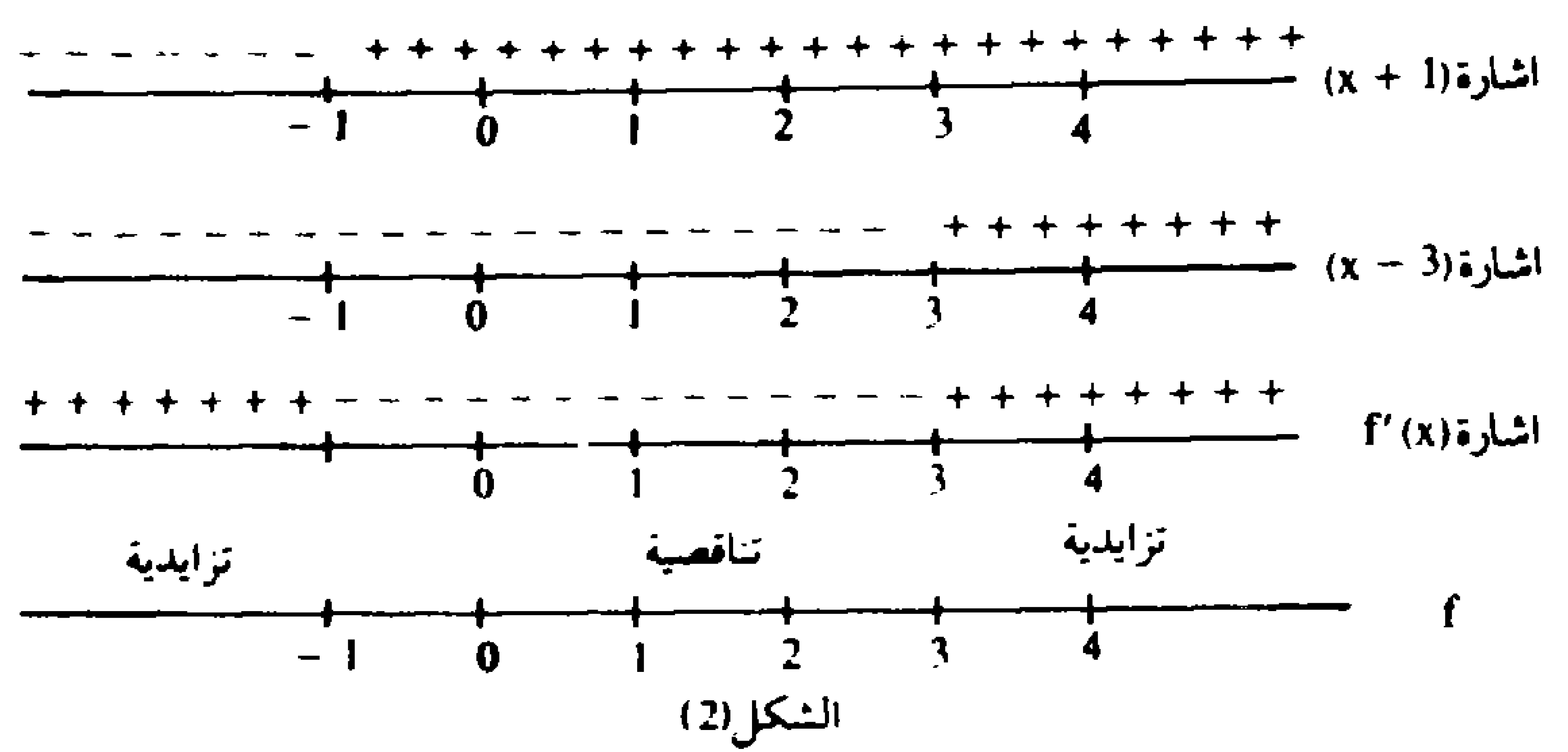
نحصل على

$$3(x+1)(x-3)=0$$

أو

$$x=-1, x=3$$

هذه هي القيم الحرجة .



الشكل(2)

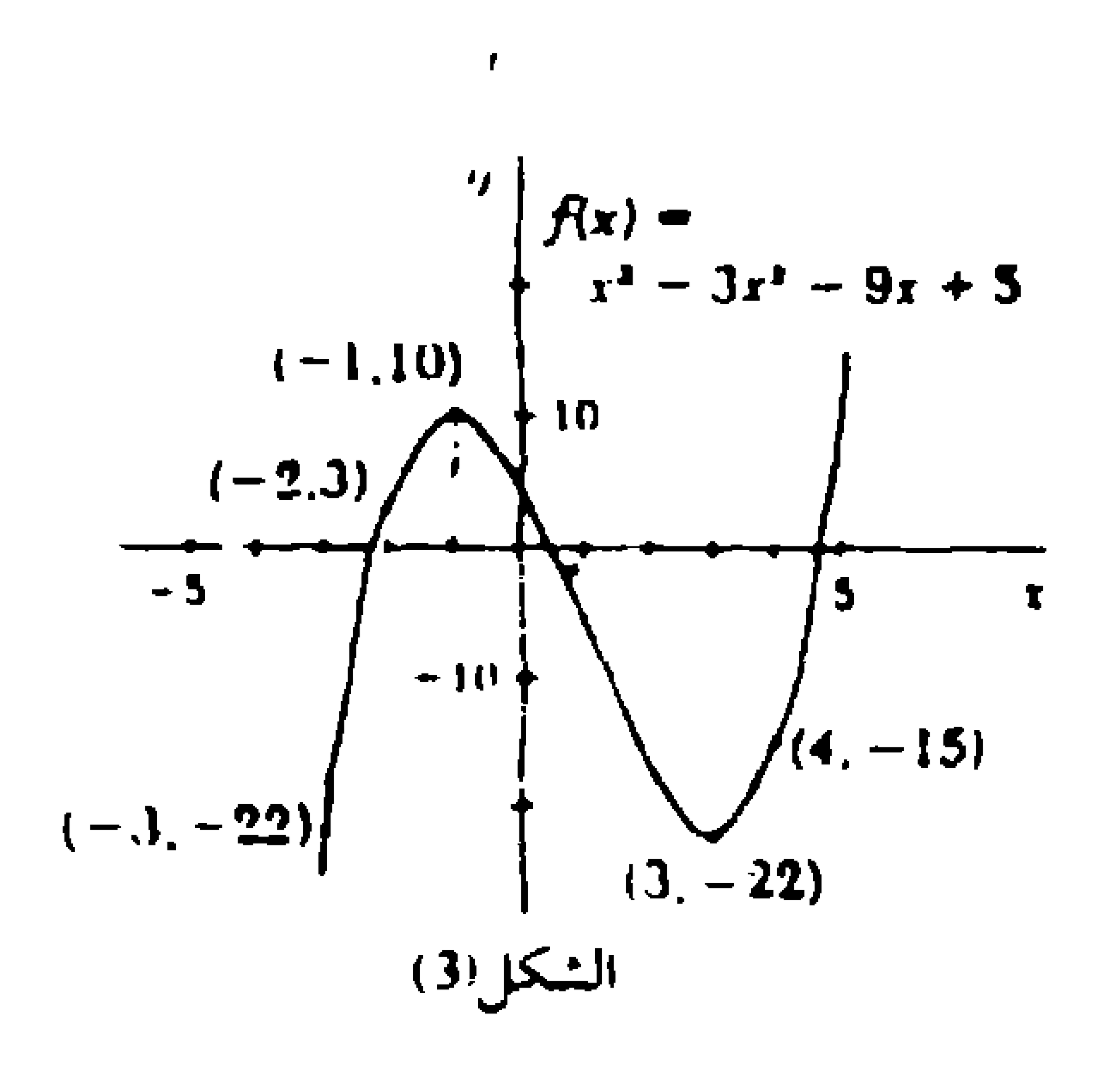
نرى من الشكل(2) ان الدالة f تزايدية ($f'(x) > 0$) عندما تكون

$$x > 3$$

أو

$$x < -1$$

وتكون الدالة تناقصية عندما تكون $-1 < x < 3$ (انظر الى الشكل(3)) .



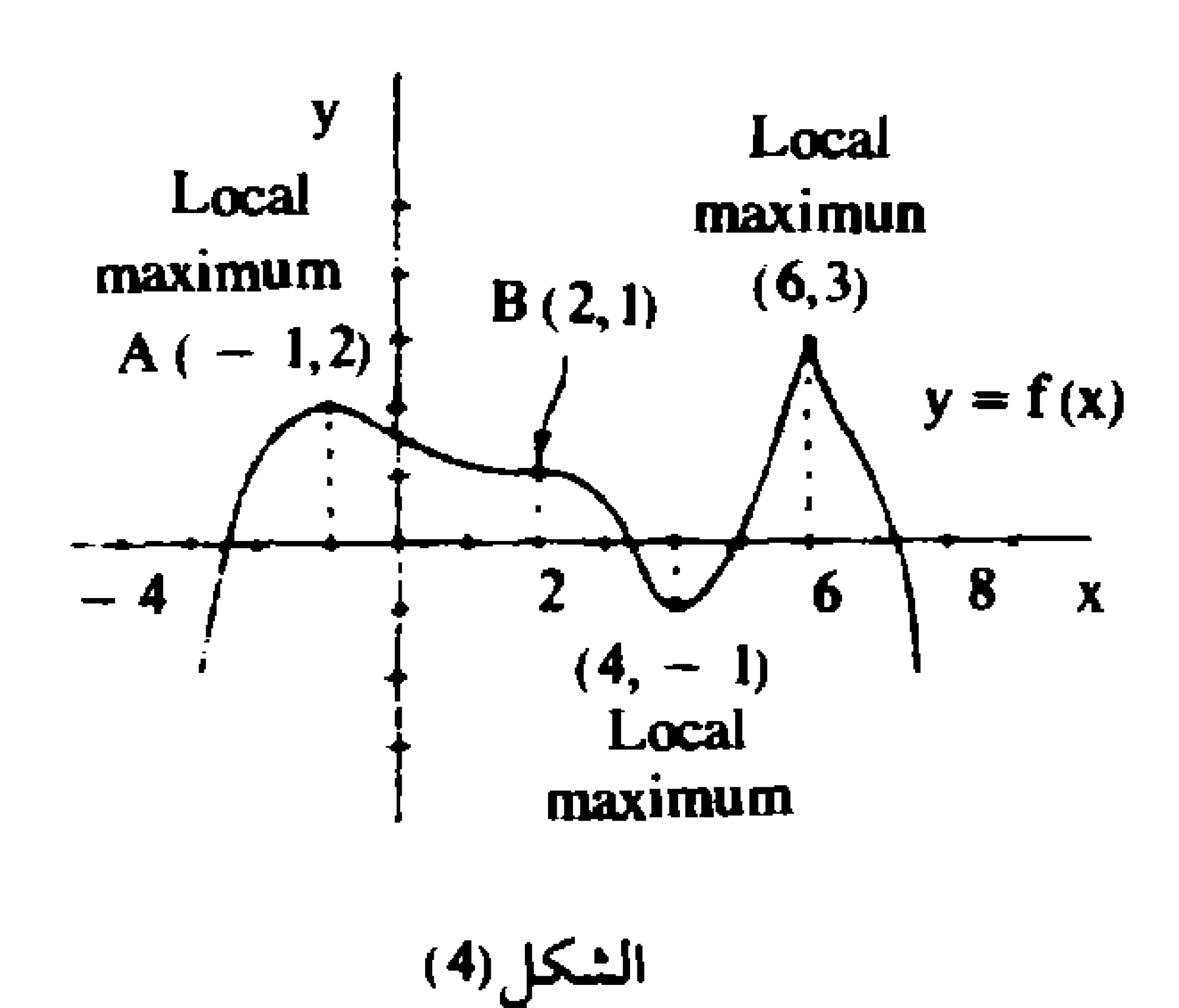
الشكل(3)

(١٤ ـ ٣) النهايات العظمى المحلية والنهايات الصغرى المحلية :

النقطة $A(-1,2)$ ليست أعلى نقطة على المنحني

$y = f(x)$

المبين في شكل(4) ولكنها أعلى نقطة بين النقاط المجاورة لها . لهذا السبب نسمي النقطة $(-1,2)$ نهاية عظمى محلية . لذا فان للدالة f نهاية عظمى محلية عند -1 . بالمثل $(4, -1)$ نهاية صغرى محلية ، لذا فان للدالة نهاية صغرى محلية عند4 . للدالة كذلك نهاية عظمى محلية عند6 ولا يوجد للدالة نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند2 . اليك الآن التعريف التالي .



الشكل(4)

تعريف «٤» :

للدالة f نهاية عظمى محلية عند c عندما تكون هناك فترة(a,b) بحيث

$a < c < b$

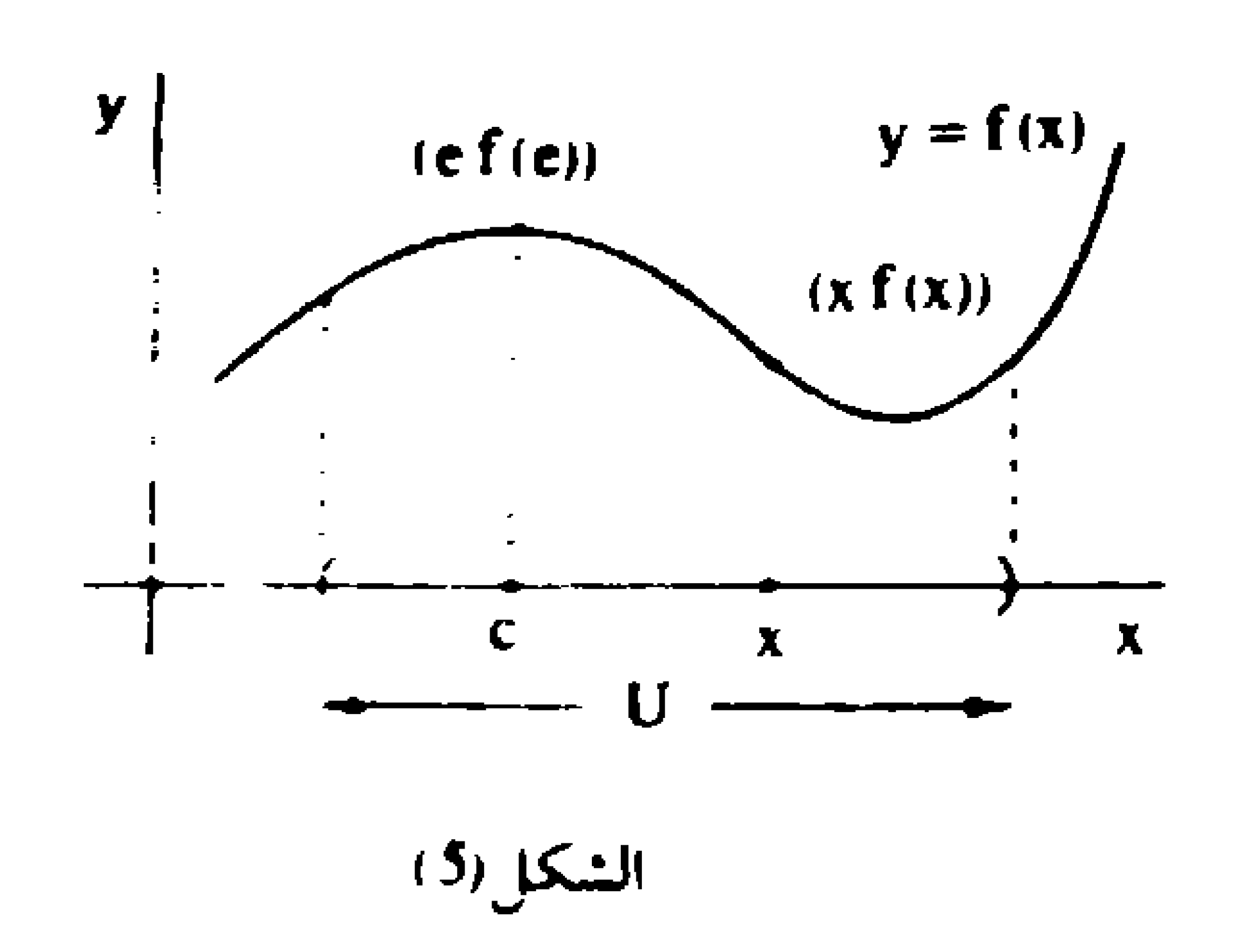
و

$f(x) < f(c)$

لجميع قيم x حيث

$a < x < b , x \neq c$

(أنظر الشكل(5)) .



الشكل (5)

وللدالة نهاية صغرى محلية اذا كان

$$f(x) > f(c)$$

لجميع قيم x حيث

$$a < x < b , x \neq c$$

نظرية «٣» :

كل نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية لدالة ما تكون عند احدى القيم الحرجة للدالة .

عكس هذه النظرية غير صحيح حيث انه ليس من الضروري ان تكون للدالة نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند كل نقطة حرجة . النقطة B في الشكل (4) هي نقطة حرجة ولكن ليس للدالة لا نهاية عظمى محلية ولا نهاية صغرى محلية عند تلك النقطة . ولكن من البديهي ان يكون للدالة f نهاية عظمى محلية عند c اذا كانت الدالة تزايدية قبل $P(c,f(c))$ مباشرة وتناقصية بعدها مباشرة . وللدالة نهاية صغرى محلية اذا كانت الدالة تناقصية قبل P مباشرة وتزايدية بعد P مباشرة . وليس للدالة نهاية عظمى محلية او نهاية صغرى محلية اذا كانت الدالة تزايدية قبل P مباشرة وبعد P مباشرة او تناقصية قبل P مباشرة وبعدها مباشرة .

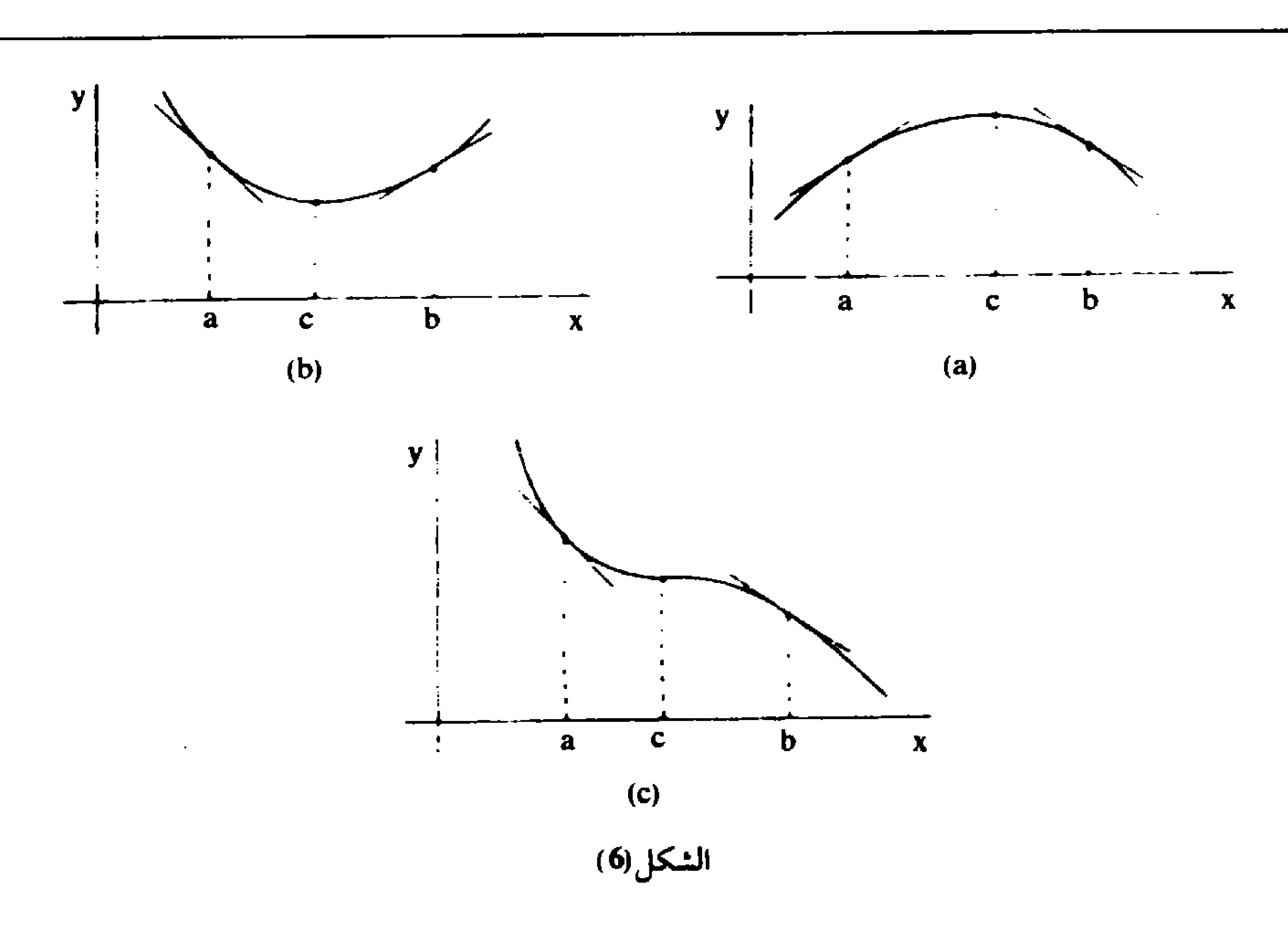
اختبار المشتقة الاولى للنهايات العظمى أو الصغرى المحلية

لتكن c قيمة حرجة للدالة b,a,f عددين بحيث ان الدالة f مستمرة في الفترة [a,b] وأن c هي القيمة الحرجة الوحيدة في [a,b] .

(١) اذا كان $f'(a) > 0$ و $f'(b) < 0$ فان للدالة f نهاية عظمى محلية عند c (الشكل 6a) .

(٢) اذا كان $f'(a) < 0$ و $f'(b) > 0$ فان للدالة f نهاية صغرى محلية عند c (الشكل 6b) .

(٣) اذا كان كل من $f'(a)$ و $f'(b)$ موجباً أو سالباً فليس للدالة لا نهاية عظمى محلية ولا نهاية صغرى محلية (الشكل 6c) .



الشكل (6)

مثال « ١ » :

اوجد النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x \quad , \quad 0 < x < 6$$

الحل :

نفاضل f(x) أولاً فنحصل على

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$= 3(x^2 - 6x + 8)$$
$$= 3(x-2)(x-4)$$

إذن

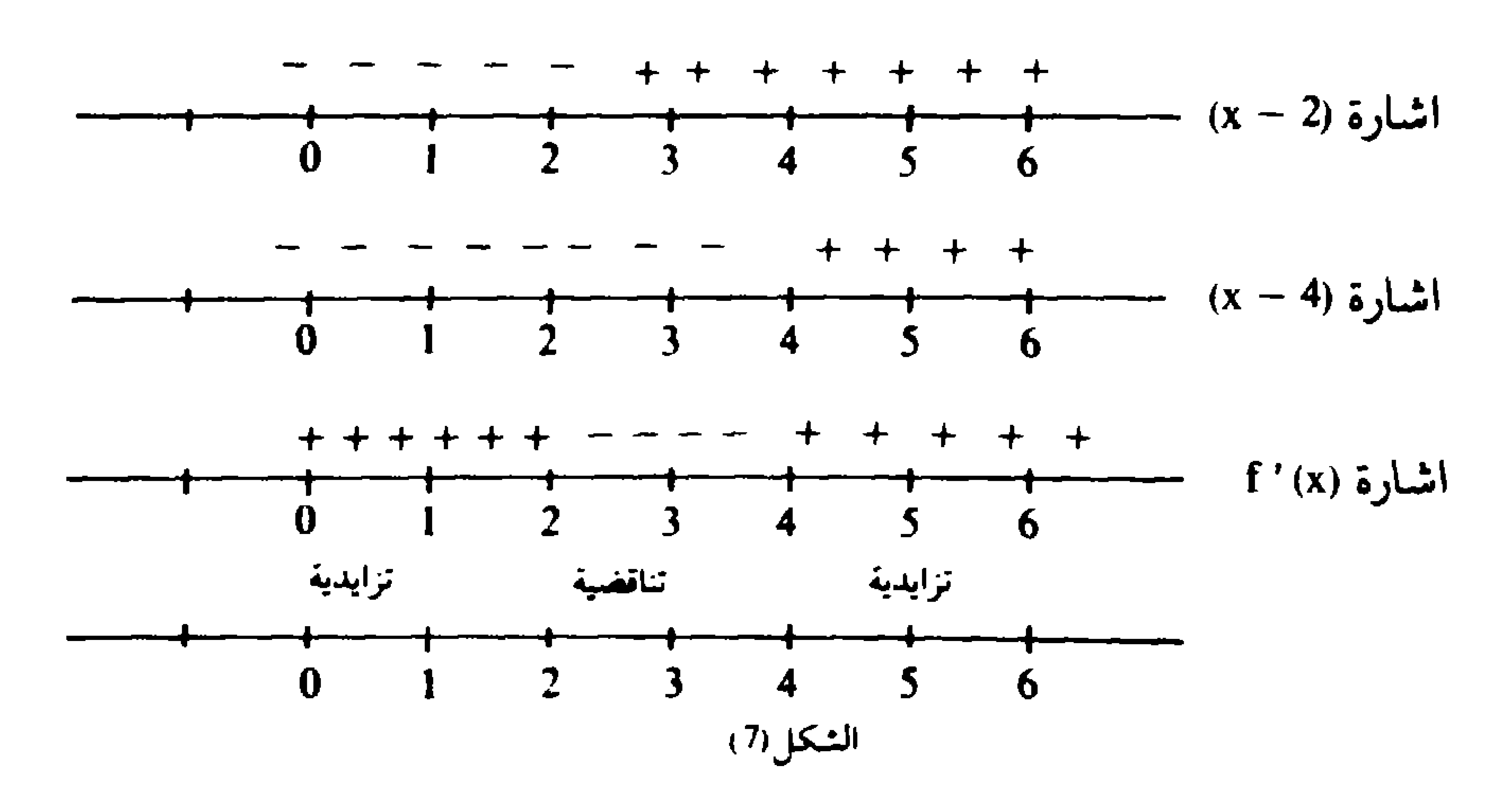
$$f'(x) = 0$$

عندما x تساوي 2 او 4 . وكذلك نرى من الشكل (7) ان

$0 < x < 2$ عندما تكون $f'(x) > 0$

$2 < x < 4$ عندما تكون $f'(x) < 0$

$4 < x < 6$ عندما تكون $f'(x) > 0$



الشكل (7)

معنى الشكل (7) ان f تزايدية في الفترة [0, 2] وفي الفترة [4, 6] وتناقصية في الفترة [2,4] . وعليه فان للدالة نهايات عظمى محلية عند 2 ولها نهايات صغرى محلية عند 4 .

والنهاية العظمى المحلية للدالة هي

$$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2)$$
$$= 8 - 36 + 48$$
$$= 20$$

والنهاية الصغرى المحلية هي

$$f(4) = 4^3 - 9(4)^2 + 24(4)$$
$$= 64 - 144 + 96$$
$$= 16$$

مثال « ٢ » :

اوجد النهايات العظمى والنهايات الصغرى المحلية للدالة

$$f(x) = x^4 - 18x^2$$

الحل :

نجد اولا $f'(x)$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x$$
$$= 4x(x^2 - 9)$$
$$= 4x(x - 3)(x + 3)$$

نجد القيم الحرجة بوضع

$$f'(x) = 0$$

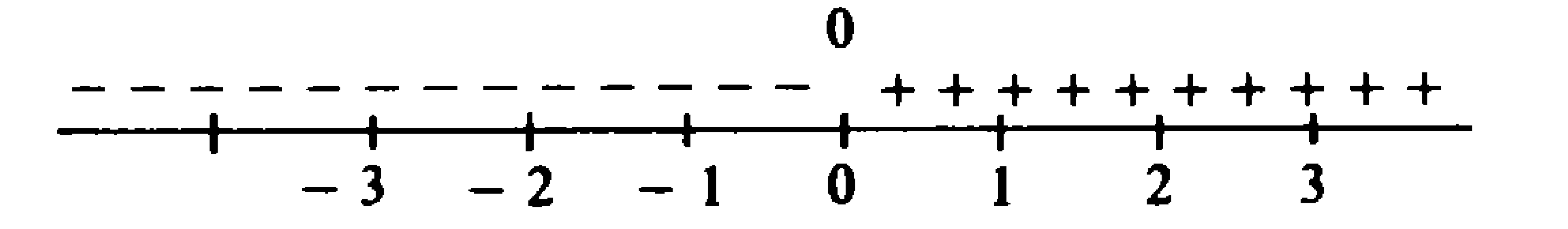
وحل المعادلة

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

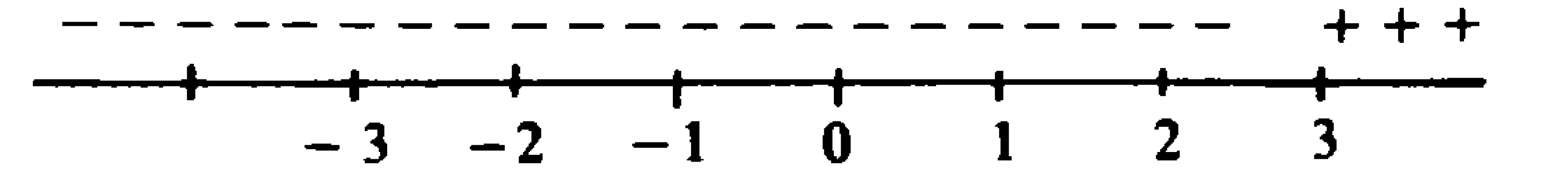
فنحصل على

$x = 0$ أو 3 أو -3

اشارة x



اشارة $(x - 3)$



اشارة $(x + 3)$

− − − − − + + + + + + + + + + + + + + + + + + +

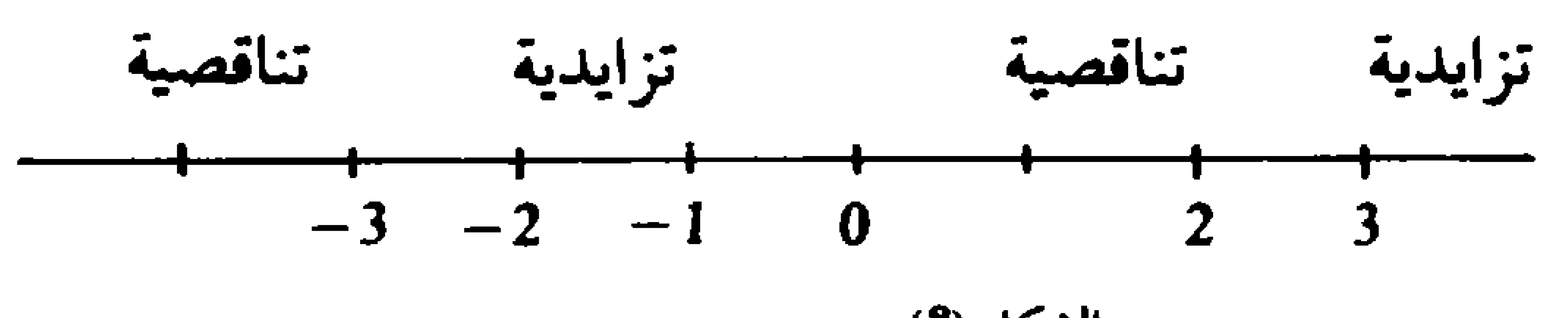
−3 −2 −1 0 1 2 3

اشارة $f'(x)$

− − − − − + + + + + + + + − − − − − − − − − − + + +

−3 0 3

f



الشكل (8)

نرى من الشكل (8) ان

$f'(x) < 0$ عندما تكون $x < -3$

$f'(x) > 0$ عندما تكون $-3 < x < 0$

$f'(x) < 0$ عندما تكون $0 < x < 3$

$f'(x) > 0$ عندما تكون $x > 3$

وأن الدالة f تزايدية في الفترة [3,0 −] والقيم $x > 3$ وتناقصية في الفترة [0,3] وعندما تكون $-3 > x$

وعليه فان للدالة f نهاية عظمى محلية عند 0 ولها نهاية صغرى محلية عند 3 − ,3 .

النهاية العظمى المحلية هي:

$$f(0) = 0$$

والنهايات الصغرى المحلية هي

$$f(-3) = (-3)^4 - 18(-3)^2$$
$$= 81 - 162$$
$$= -81$$

و

$$f(3) = (3)^4 - 18(3)^2$$
$$= 81 - 162$$
$$= -81$$

تمارين (١) :

في التمارين من 1 الى 6 اعط مثالا لدالة تحقق الشروط المعطاة

1. تزايدية في الفترة $(-\infty,0)$ وتناقصية في الفترة $(0,\infty)$
2. ليس لها نهايات عظمى او صغرى .
3. لها نهاية عظمى ونهاية صغرى في نهايات الفترة [0,5] فقط
4. لها نهاية عظمى واحدة فقط وليس لها نهايات صغرى

5. لها نهاية صغرى واحدة فقط وليس لها نهايات عظمى

6. ليس لها مماس عند النقطة (0,1)

في التمارين من 7 الى 16 اوجد الفترات التي تكون الدالة فيها تزايدية ، والفترات التي تكون فيها الدالة تناقصية . ثم اوجد جميع النهايات العظمى والصغرى

7. $f(x) = x^2 - 6x + 2$

9. $f(x) = 2 - x^2$

11. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$

12. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12. \; -4 \leqslant x \leqslant 4$

13. $f(x) = 4 + 3x^2 - 2x^3$

15. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3$

8. $f(x) = x^2 + 4x - 3. \quad -4 \leqslant x \leqslant 1$

10. $f(x) = 4x - x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3.$

14. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

16. $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 24x^2 - 17$

(١٤ - ٤) التقعر ونقاط الانقلاب :

المنحنيان المرسومان في الشكل (9) وكلاهما تصاعديان من A إلى B ولكن مع ذلك فانهما منحنيان مختلفان . ولرسم منحني بطريقة اكثر دقة فاننا نحتاج الى تعريف كل من التقعر ونقاط الانقلاب . فاذا نظرنا الى المنحنى الموجود في شكل (10) نجد ان الجزئين الى يسار النقطة A والى يمين النقطة B مقعران الى اعلى بينما نجد ان الجزء بين A ، B مقعر الى أسفل .

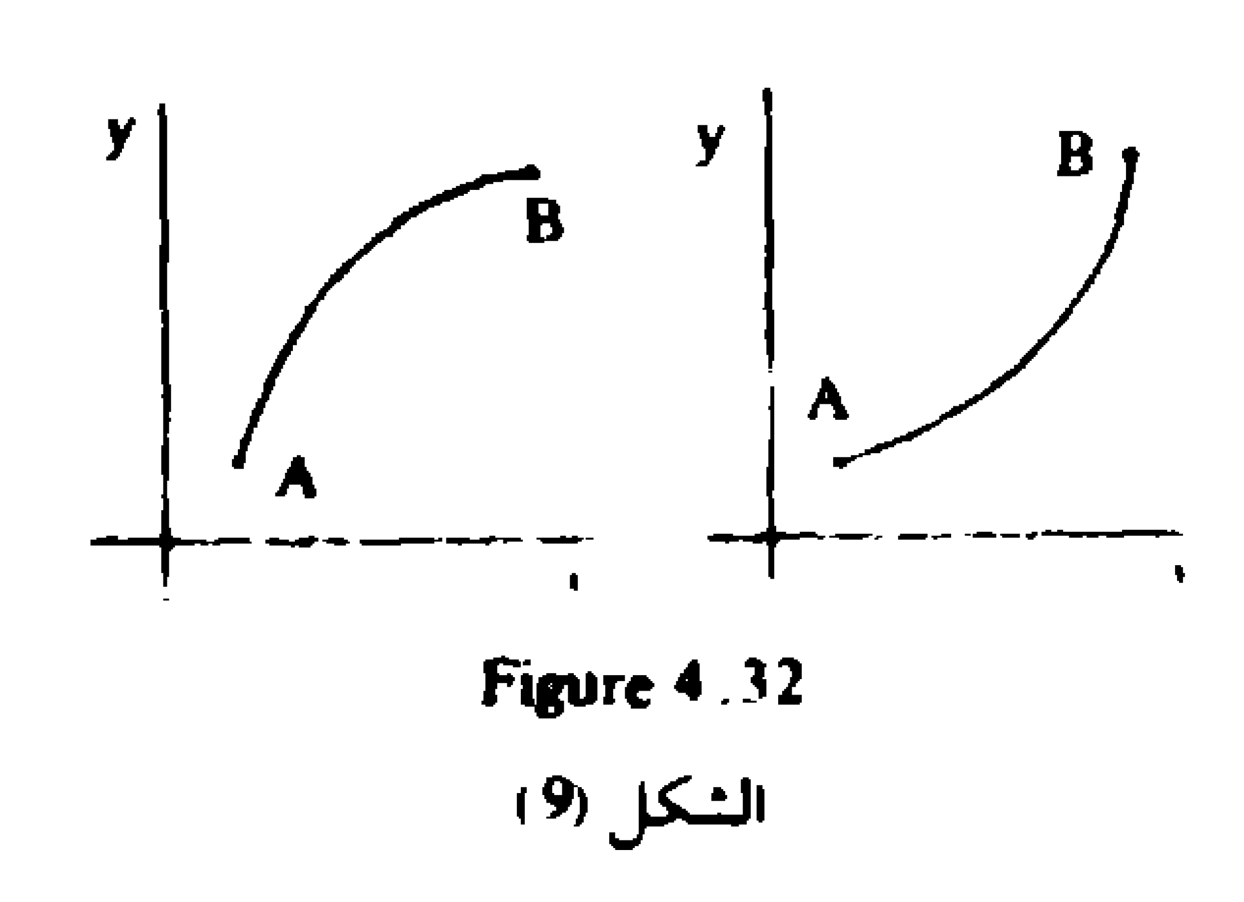
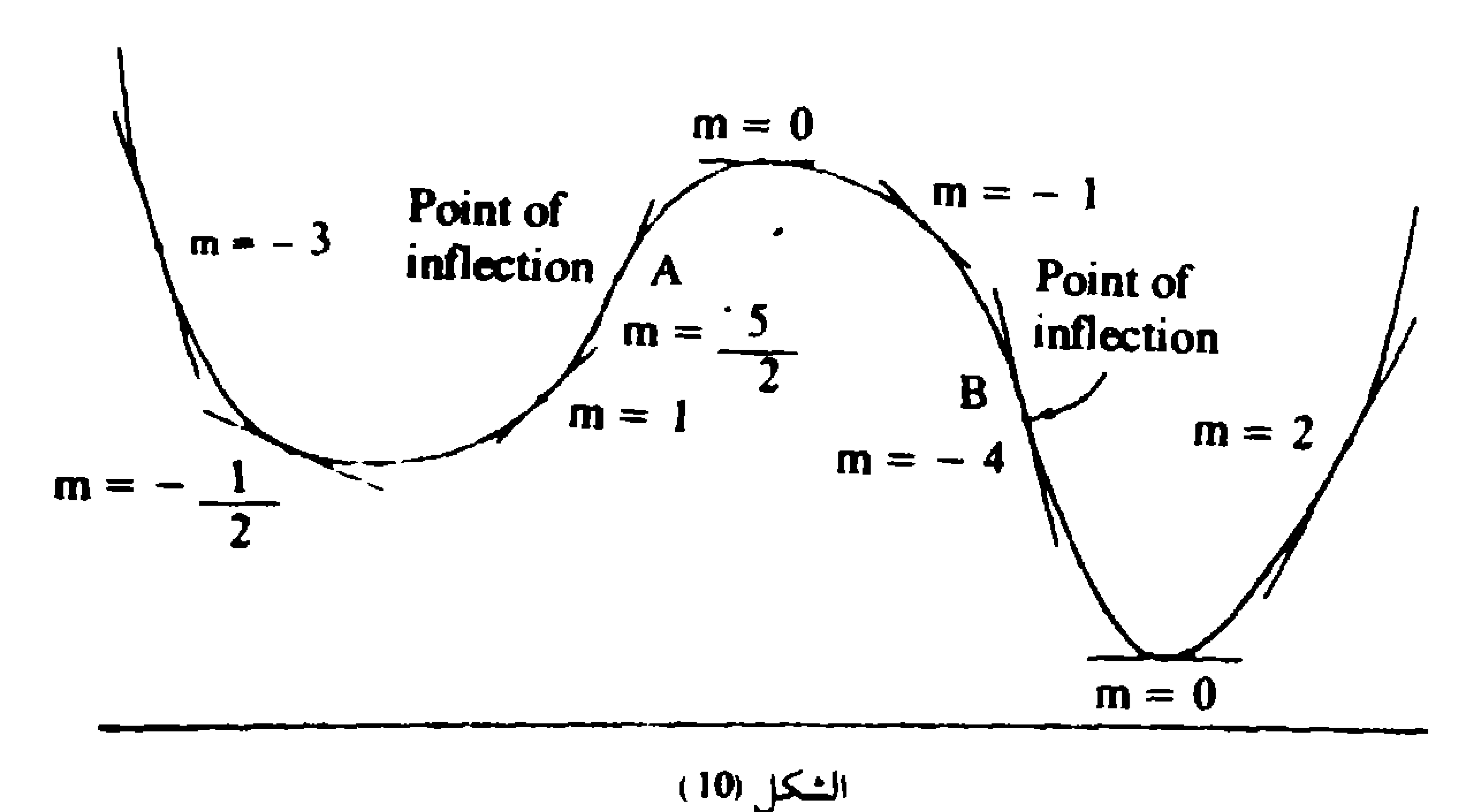


Figure 4.32

الشكل (9)

المشتقة الأولى تعطي بعض المعلومات بهذا الخصوص . يسمى جزء المنحنى الى يسار النقطة A .



الشكل (10)

والى يمين النقطة B مقعراً الى الأعلى ، ويسمى الجزء بين A و B بانه مقعّر الى الأسفل . قبل ان نتكلّم عن قواعد التقعّر الى اعلى او الى اسفل لا بد ان نوضّح بدقة اكثر ما نقصد بهذه الاصطلاحات . فاذا قمنا بتحريك نقطة ما على المنحنى الموجود في شكل

(10) من اليسار الى اليمين نجد ان الميل m للمماسات المناظرة لهذه النقطة المتحركة يزداد حتى نصل الى النقطة A ثم يبدأ في النقصان حتى نصل الى النقطة B ثم يزداد الميل m مرة اخرى على يمين النقطة B ويستمر في الزيادة . ويمكننا الآن تقديم التعريف التالي .

تعريف « ٥ » :

افترض ان للدالة f مشتقة في الفترة I . منحنى الدالة F مقعّر الى اعلى في I اذا كانت دالة المشتقة F' تزايدية في I ومقعّراً الى اسفل في I اذا كانت دالة المشتقة F' تناقصية في I .

وبعبارة اخرى فان المنحنى مقعّر الى اعلى في الفترة I اذا كان $f'(x_1) < f'(x_2)$ لجميع x_2, x_1 في الفترة I حيث تكون $X_1 < x_2$ ويكون المنحنى مقعّر الى اسفل في الفترة I اذا كان $f'(x_1) > f'(x_2)$ لجميع القيم x_1 و x_2 في الفترة بحيث ان $x_1 < x_2$.

نظرية « ٤ » :

افترض ان للدالة f مشتقة مستمرة في الفترة I فان :

(١) منحنى f مقعّر الى اعلى في الفترة I اذا كان

$$f''(x) \geqslant 0$$

لجميع قيم x في الفترة I .

(٢) منحنى الدالة f مقعّر الى اسفل في الفترة I اذا كان

$$f''(x)' < 0$$

لجميع قيم x في الفترة .

في النقطتين A ، B في الشكل (١٠) ، يتغير التقعّر من تقعّر الى اسفل الى تقعّر الى اعلى وبالعكس . تسمى مثل هذه النقاط نقاط انقلاب Points of inflection .

تعريف « ٦ » :

النقطة $(C, f(c))$ نقطة انقلاب لمنحنى الدالة f اذا كانت f مستمرة عند C واذا كان منحنى الدالة مقعراً الى اسفل مباشرة الى يسار c ومقعراً الى اعلى مباشرة الى يمين c او

بالعكس .

تحدث نقطة الانقلاب اما عند النقطة c التي تكون فيها المشتقة الثانية f'' مستمرة و

$$f''(c) = 0$$

واما عند النقاط التي لا تكون فيها f'' مستمرة .

مثال « ١ » :

ارسم المنحنى

$$y = -x^5 - 5x^4$$

بعد ايجاد نقاط النهاية العظمى والصغرى والفترات التي يكون فيها المنحنى مقعّراً الى اعلى والفترات التي يكون فيها مقعّراً الى اسفل وكذلك نقاط الانقلاب .

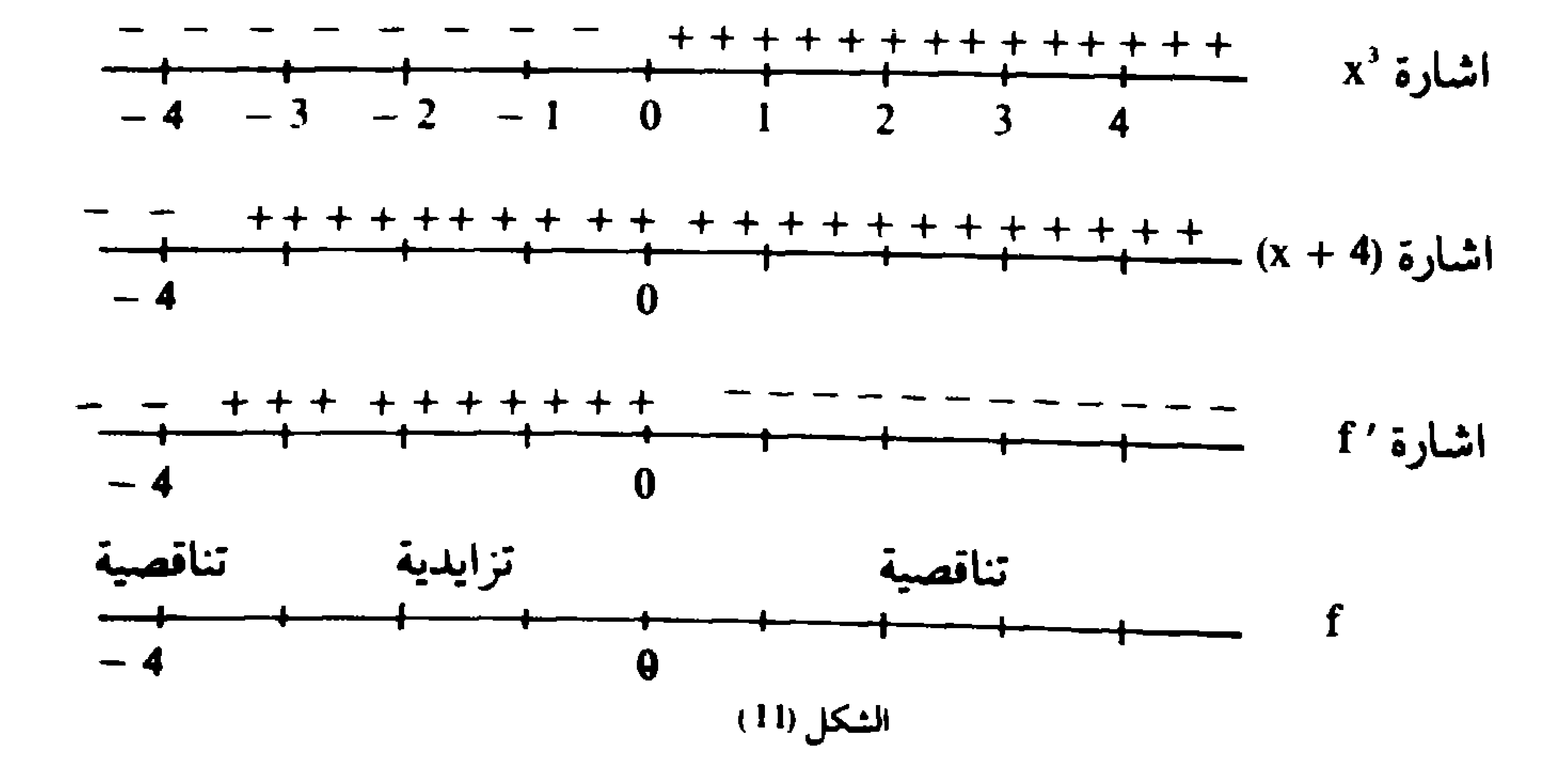
الحل :

لنفرض ان

$$f(x) = -x^5 - 5x^4$$

يجب ان نعرف اولا اين تكون الدالة تزايدية واين تكون تناقصية .

$$f'(x) = -5x^4 - 20x^3$$
$$= -5x^3(x + 4)$$



الشكل (11)

لذا يكون للمنحنى مماس افقي في $A(-4, -256)$ و $B(0,0)$. كما نرى من الشكل (11) ان الدالة تناقصية في

$$x > 0$$

وفي

$$x < -4$$

وتزايدية في

$$-4 < x < 0$$

وعليه فان للدالة نهاية عظمى عند $(0,0)$ ونهاية صغرى عند $(-4, -256)$.

نوجد الآن مناطق تقعر المنحنى ونقاط الانقلاب

$$f''(x) = -20x^3 - 60x^2$$
$$= -20x^2(x+3)$$

نضع

$$f''(x) = 0$$

فنحصل على

$$x = 0 \quad , \quad x = -3$$

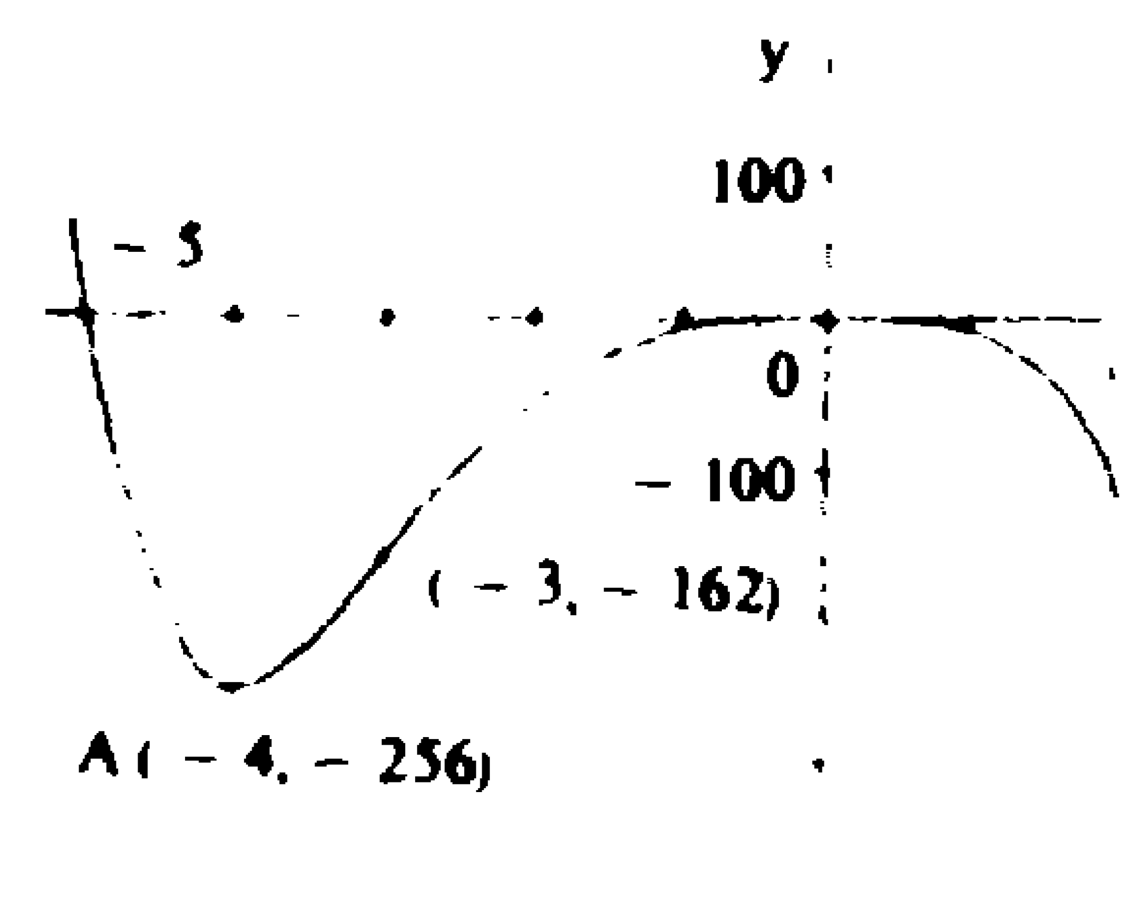
اشارة x^2	+ (النقاط −3، −2، −1، 0، 1، 2)			
	$x < -3$	-3	$-3 < x < 0$	0	$x > 0$

	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$x > 0$
اشارة x^2	+ + + +	+ + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + +
اشارة $(x+3)$	− − − −	+ + + + + + + +	+ + + + + + + + + + + +
اشارة f''	+ + + + +	− − − − − − − −	− − − − − − − − − − − −
التقعر	اعلى	اسفل	اسفل

الشكل (12)

نرى ان النقطة الوحيدة التي يتغير فيها التقعّر من تقعّر الى اعلى الى تقعّر الى اسفل أو بالعكس هي النقطة $(-3, -162)$. اذاً هذه هي نقطة الانقلاب الوحيدة .

نرى رسم هذه الدالة في الشكل (13) .



الشكل (13)

(١٤ ـ ٥) اختبار المشتقة الثانية :

يمكن استخدام هذا الاختبار لمعرفة ما اذا كانت القيمة الحرجة تعطى نهاية عظمى او صغرى ام لا . يعتبر هذا الاختبار كطريقة ثانية لايجاد النهايات العظمى والصغرى المحلية .

(١) اذا كان

$$f''(c) > 0 \text{ ،} \quad f'(c) = 0$$

فان للدالة f نهاية صغرى محلية عند c

(٢) اذا كان

$$f''(c) < 0 \quad , \quad f'(c) = 0$$

فان للدالة f نهاية عظمى محلية عند c

(٣) اذا كان

$$f''(c) = 0 \quad , \quad f'(c) = 0$$

فلا نستطيع استخدام هذا الاختبار .

مثال « ١ » :

اوجد النهايات العظمى المحلية والنهايات الصغرى المحلية للدالة .

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

الحل :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x - 2)$$

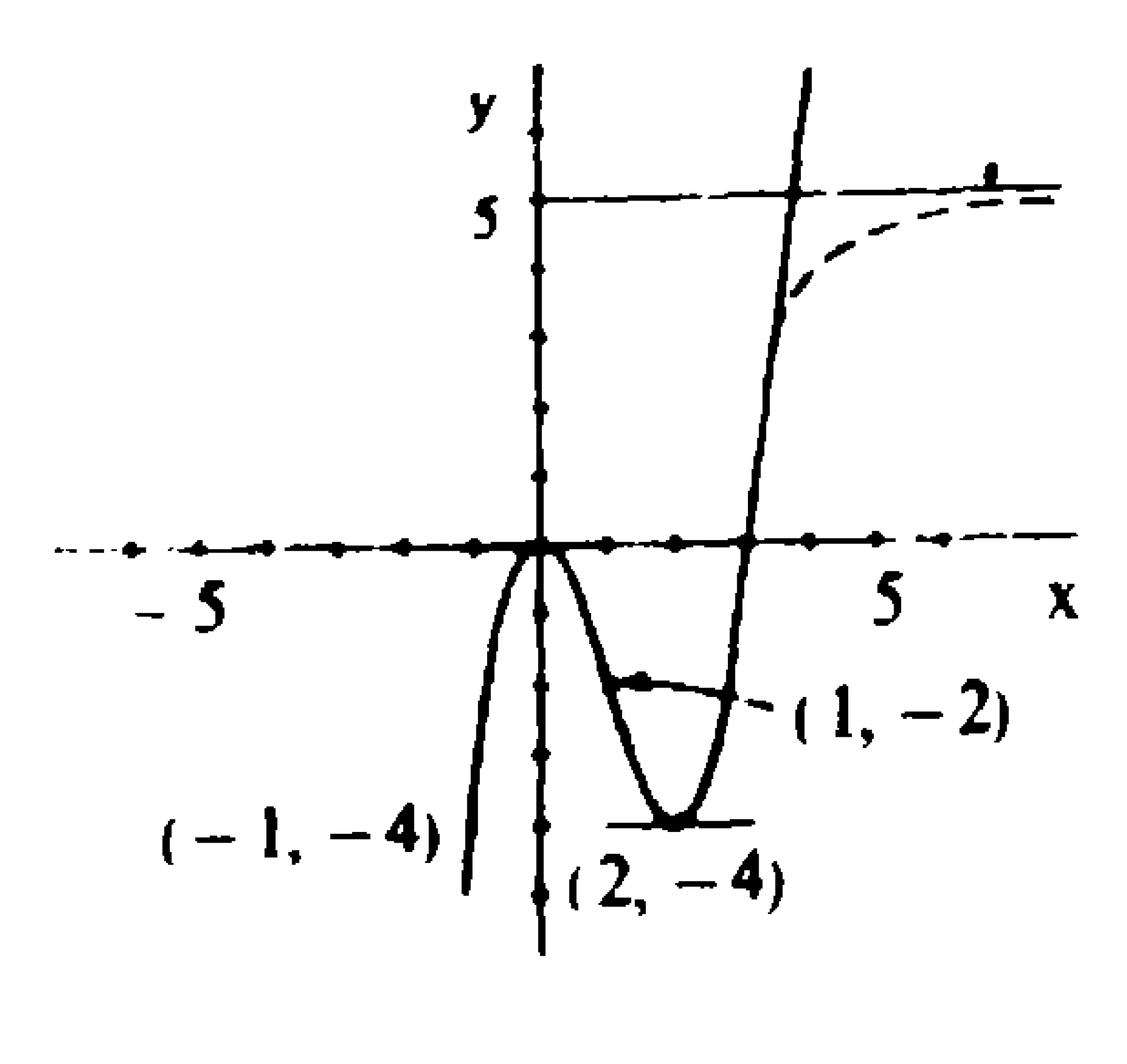
القيم الحرجة هي 0 و 2

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0 \quad , f''(0) = -6 < 0$$

اذاً للدالة نهاية صغرى محلية عند 2 ونهاية عظمى محلية عند 0 .

نرى رسم منحنى هذه الدالة في الشكل (14) .



الشكل (14)

مثال « ٢ » :

استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة .

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 10$$

الحل :

نجد اولا $f'(x)$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$
$$= 4x(x^2 - 1)$$
$$= 4x(x - 1)(x + 1)$$

نضع

$$f'(x) = 0$$

فنحصل على القيم الحرجة للدالة f

$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$x = 0 \quad , \quad 1, -1$$

نجد الآن المشتقة الثانية

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$
$$= 4(3x^2 - 1)$$

نجد قيم دالة المشتقة الثانية عند القيم الحرجة فنحصل على

$f''(0) = -4$

$f''(-1) = 8$

$f''(1) = 8$

وعليه فان $f(0)$ هي نهاية عظمى محلية وان كلا من $f(-1)$ و $f(1)$ نهاية صغرى محلية للدالة .

مثال « ٣ » :

ارسم منحنى الدالة

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

$$-2 < x < 6$$

الحل :

نجد $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x - 1)(x - 3)$$

نضع

$$f'(x) = 0$$

لايجاد القيم الحرجة للدالة نضع

$$3(x - 1)(x - 3) = 0$$

فنحصل على

$$x = 1,3$$



الشكل (15)

نرى من الشكل (15) ان الدالة f تكون تزايدية في $3 < x < 6$ و $-2 < x < 1$ وتناقصية في $1 < x < 3$. وعليه فان للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = 1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 3$ وقيم هذه النهاية العظمى المحلية هي :

$$f(1) = 9$$

والنهاية الصغرى المحلية هي

$$f(3) = 5$$

المشتقة الثانية للدالة هي

$$f''(x) = 6x - 12$$
$$= 6(x - 2)$$

واضح أن قيمة المشتقة الثانية تساوي صفراً فقط عندما تكون x تساوي 2

وأن $f''(x) < 0$ عندما تكون $-2 < x < 2$

وعليه فان المنحنى مقعر الى الأسفل عندما تكون $-2 < x < 2$ وان

$f''(x) > 0$ عندما تكون $2 < x < 6$

وعليه فان المنحنى مقعر الى الأعلى عندما تكون $2 < x < 6$.

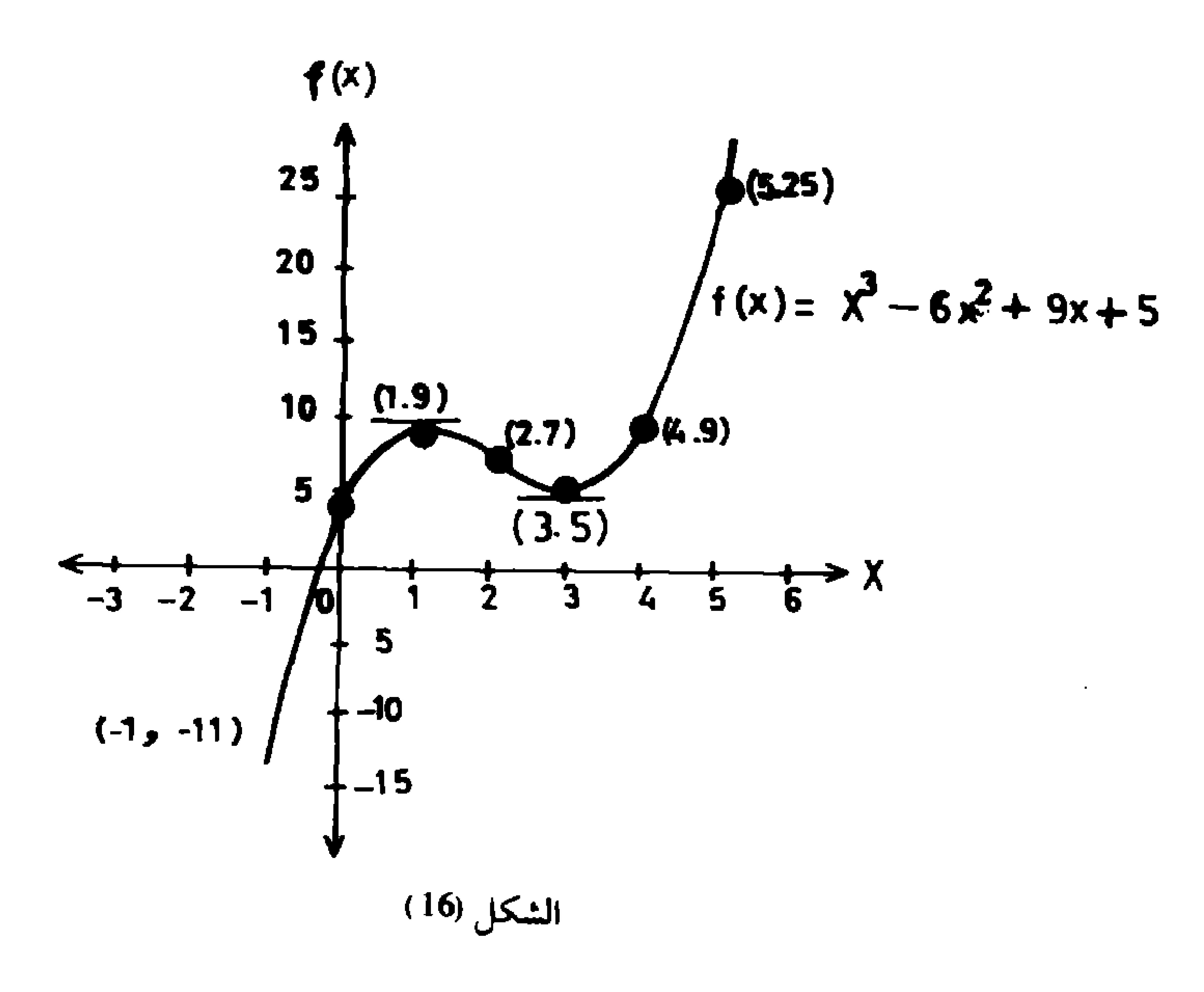
نستنتج مما سبق ان للدالة نقطة انقلاب عند النقطة $(2, f(2))$ أي $(2,7)$ حيث يتغير التقعر من تقعر الى الأسفل الى تقعر الى الأعلى .

نجد بضعة نقاط اخرى على المنحنى

$$f(-1) = -11, f(0) = 5, f(1) = 9, f(2) = 7, f(3) = 5,$$

$$f(4) = 9, f(5) = 25$$

نستخدم كل هذه المعلومات في رسم المنحنى الذي نجده مرسوماً في الشكل (16) .

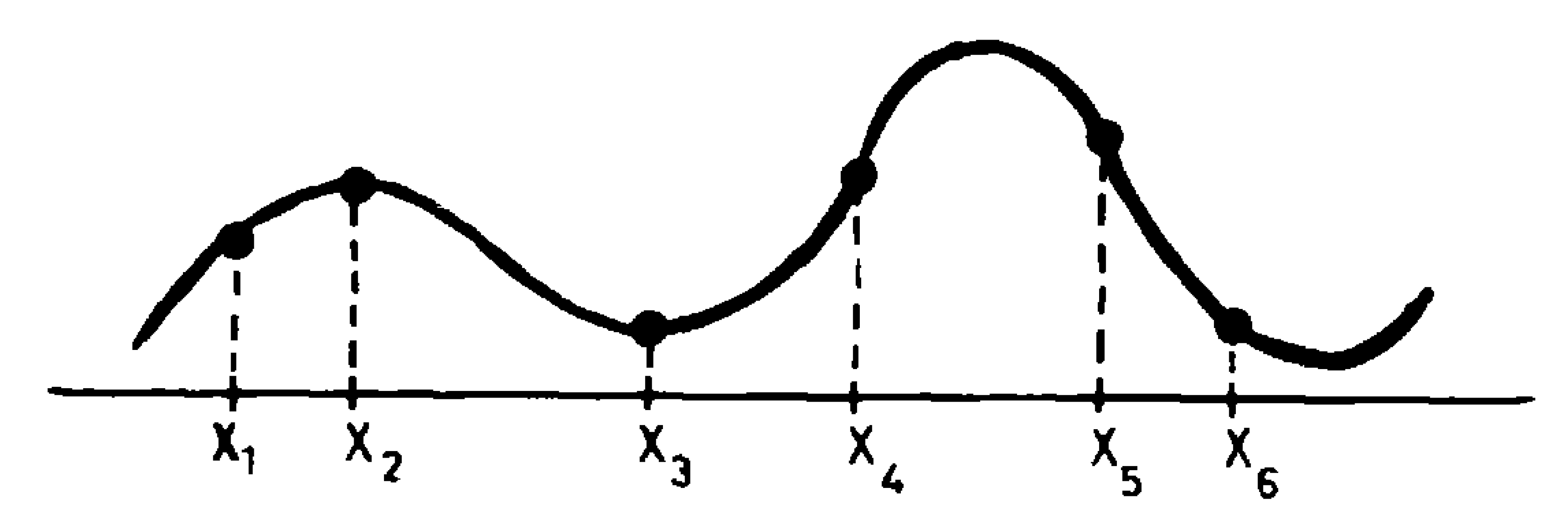


الشكل (16)

تمارين (٢) :

في كل من النقاط $x_1, x_2, \ldots\ldots x_6$

في الشكل اذكر ما اذا كانت المشتقة الأولى للدالة موجبة او صفر أو سالبة وكذلك اذكر ما اذا كانت المشتقة الثانية موجبة او صفر او سالبة .



في التمارين من 7 الى 12 اوجد جميع النهايات العظمى والنهايات الصغرى باستخدام اختبار المشتقة الثانية وكذلك اوجد نقاط الانقلاب ثم ارسم المنحنى .

7. $f(x) = x^2 + 4x + 2$

8. $f(x) = x^2 - 5x - 3$

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 48$

10. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 9x + 12$

11. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$

12. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 19$

(١٤ ـ ٦) تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى :

نتجه الآن الى التطبيقات العملية للمشتقة ، وأهمها مسائل عملية على النهايات العظمى والصغرى . نوضح هذه التطبيقات ببعض الأمثلة .

مثال « ١ » :

فلاح عنده 600 متراً من السياج ويرغب في استعماله في حصر حقل مستطيل الشكل يحاذي نهراً ولا يحتاج سياجاً من جهة النهر . ماذا يجب ان تكون ابعاد الحقل لحصر اكبر مساحة ممكنة ؟ (انظر شكل (17)) .

الحل :

افرض ان x هو طول الجانب العمودي على النهر .

اذا

$$600 - 2x$$

هو طول الجانب الموازي للنهر . مساحة الحقل هي

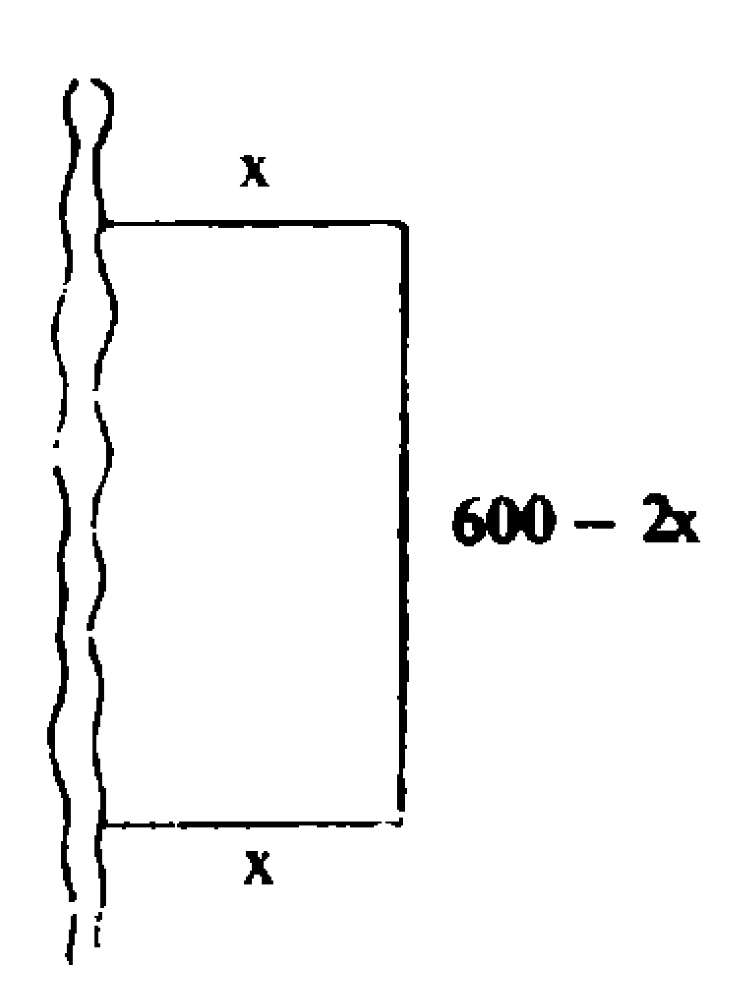
$$A(x) = x(600 - 2x)$$

(يوضح شكل (18) الرسم البياني للدالة $A(x)$) .

واضح ان

$$0 \leqslant x \leqslant 300$$

بما ان المساحة تعتمد على x فانها تمثل دالة . فما علينا الآن الا ان نجد النهاية العظمى لدالة المساحة في الفترة $[0,300]$. الدالة معرفة في هذه الفترة فقط وترى منحنى الدالة مرسوماً في الشكل (17) .



الشكل (17)

نجد القيم الحرجة للدالة

$$A'(x) = 600 - 4x$$

$$= 4(150 - x)$$

القيمة الحرجة الوحيدة هي150

لمعرفة ما اذا كانت هذه القيمة تعطى أو لا تعطى نهاية عظمى نستخدم اختبار المشتقة الثانية

$$A''(x) = -4$$

اذا

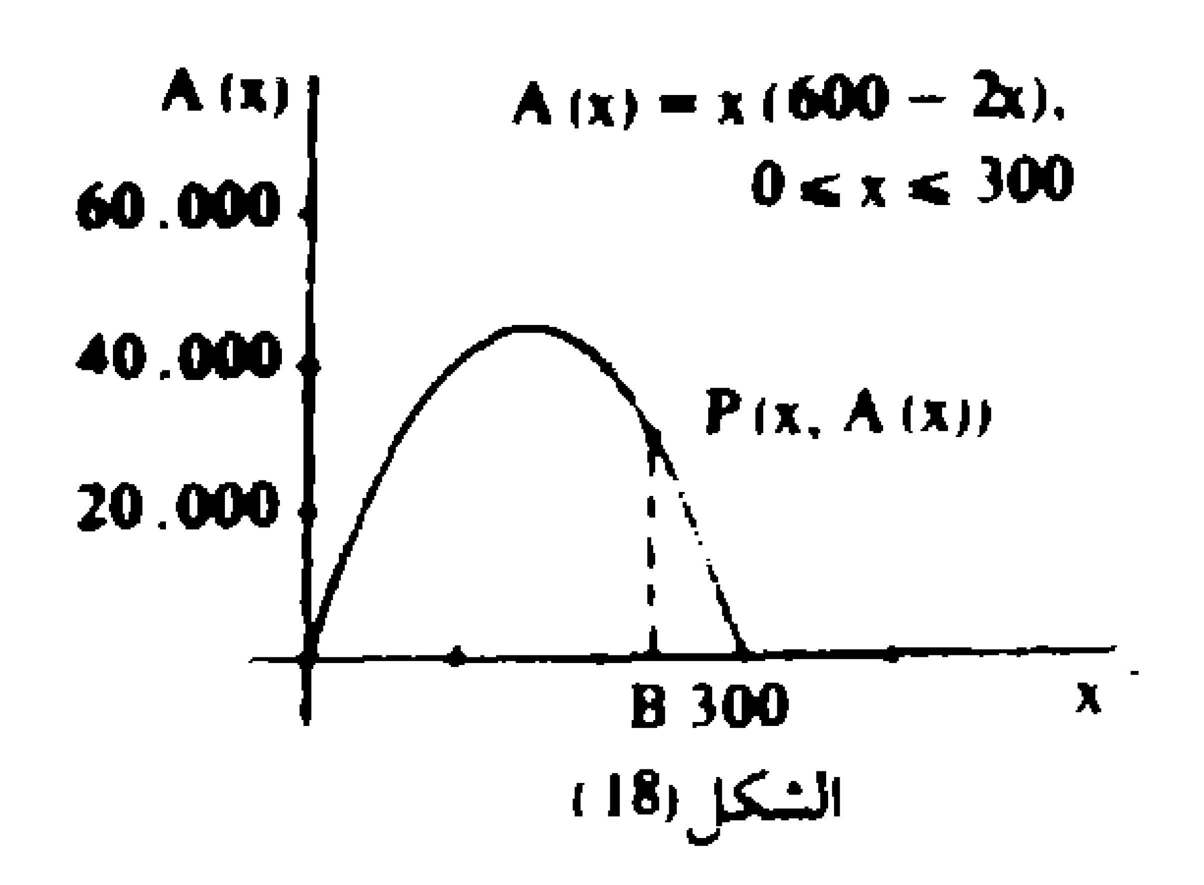
$$A''(150) < 0$$

اذا للدالة نهاية عظمى في150 . وهو طول جانب الحقل العمودي على النهر وطول الجانب الموازي للنهر هو

$$600 - 2x = 600 - 2(150)$$

$$= 600 - 300$$

$$= 300 \text{ m}$$



الشكل (18)

مثال «٢» :

اوجد عددين صحيحين موجبين مجموعهما 36 بحيث ان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :

اذا كان x أحد هذين العددين الصحيحين الموجبين فان العدد الصحيح الموجب الآخر هو

$$36 - x$$

الدالة التي ينبغي ان نجد نهايتها العظمى هي

$$f(x) = x(36 - x) \quad 0 < x < 36$$

المشتقة

$$f'(x) = 36 - 2x \quad 0 < x < 36$$

تساوي صفراً فقط عندما تكون

$$x = 18$$

بما ان

$$f''(x) = -2 < 0$$

نستنتج ان للدالة نهاية عظمى عند

$$x = 18$$

وعليه فان كلا من العددين الصحيحين الموجبين يساوي 18 .

تمارين (٣) :

1 . أوجد عددين صحيحين موجبين مجموعهما 50 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

2 . أوجد عددين صحيحين موجبين حاصل ضربهما 144 ومجموعهما أقل ما يمكن .

3 . عددان صحيحان موجبان . مجموع أحدهما وثلاثة أمثال الآخر يساوي 60 . أوجد العددين اذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

4 . قسّم العدد 10 الى جزئين بحيث يكون مجموع مربعي الجزئين أصغر ما يمكن .

5 . أوجد أقرب نقطة على منحني

$$y = x^2$$

من النقطة (1,1).

6 . صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها 15 سم . قطعت مربعات صغيرة متساوية من أركانها ثم طويت الأجزاء البارزة لتكوين صندوق مفتوح (بدون غطاء) . أوجد أبعاد المربعات المقطوعة ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

7 . يراد بناء عمارة مستطيلة الشكل مساحتها 40560 متراً مربعاً . على ان يعمل الجانب الأمامي من الزجاج . والجوانب الثلاثة الأخرى من السمنت . فاذا كانت تكلفة انشاء الزجاج للمتر الواحد ضعف تكلفة السمنت للمتر الواحد . أوجد أبعاد العمارة التي يكلف انشاؤها أقل مبلغ ممكن .

8 . دالتا التكلفة الكلية والايراد لمنتج معين هما

$$C(x) = 0.05x^2 + 29x + 1000$$

$$R(x) = 50x - x^2$$

على التوالي . أوجد عدد الوحدات اللازم انتاجها لكي يكون الربح أكبر ما يمكن .

الباب الخامس عشر

التكامل

ندرس في هذا الباب موضوع التكامل بنوعيه المحدد وغير المحدد . حيث نبدأ بدراسة التكامل غير المحدد (Indefinite Integral) أو ما يسمى بالمشتقة المضادة (Antiderivative) وندرس بعض الطرق لايجاد التكامل غير المحدد . ثم ندرس بعد ذلك التكامل المحدد (Definite Integral) واستخدامه في ايجاد المساحة المحصورة بين أي منحنى والمحاور الاحداثية أو بين منحنيين .

(١٥ - ١) المشتقات المضادة :

لكل دالة f قابلة للاشتقاق دالة تناظرها هي دالة المشتقة f′ وهذه الأخيرة هي الدالة التي تعرف بأن لكل x في نطاقها العنصر المناظر له هو $f'(x)$ ، قيمة المشتقة . هناك سؤ ال طبيعي تجدر الاجابة عنه وهو اذا أعطيت دالة المشتقة f′ هل يمكن ايجاد الدالة الأصلية f ، أي الدالة التي دالة المشتقة لها هي f′ ؟ أو بعبارة أخرى هل من الممكن ايجاد دالة F بحيث تحقق المعادلة

$$F'(x) = f(x) \, ?$$

اذا كانت هناك دالة F تستوفي فيها هذه الخاصية فانها تسمى مشتقة مضادة .

تعريف :

تسمى الدالة F مشتقة مضادة للدالة f اذا كان

$$F'(x) = f(x)$$

فمثلاً مشتقة مضادة للدالة

$$f(x) = 2x$$

هي الدالة

$$F(x) = x^2$$

ودالة أخرى مشتقتها الدالة

$$f(x) = 2x$$

هي الدالة

$$G(x) = x^2 + 3$$

وذلك لأن

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3) = 2x$$

يقودنا هذا الى القول بأن للدالة $f(x) = 2x$ عدداً لا حصر له من المشتقات المضادة . في الحقيقة أية دالة من الدوال

$$x^2, x^2 + \frac{1}{2}, x^2 + 2, x^2 + \sqrt{5}, x^2 - \pi, x^2 + k$$

حيث ان k هو أي عدد ثابت ، لها مشتقة مساوية الى $2x$.

نظرية :

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق وكانت الدالة F مشتقة مضادة للدالة f فان أية مشتقة مضادة للدالة f هي من نمط

$$F(x) + k$$

حيث ان k عدد ثابت .

البرهان :

لنفرض ان G مشتقة مضادة للدالة f . ضع

$$H(x) = G(x) - F(x)$$

$$H'(x) = [\, G(x) - F(x) \,]'$$

$$= G'(x) - F'(x)$$

ولكن كلا من F و G مشتقة مضادة للدالة f

اذا

$$F'(x) = f(x) \,,\ G'(x) = f(x)$$

وعليه فان

$$H'(x) = 0$$

اذا

$$H(x) = k$$

أي أن

$$G(x) - F(x) = k$$

اذا

$$G(x) = F(x) + k$$

وهو المطلوب .

فمثلاً جميع المشتقات المضادة لـ x^5 هي من نمط

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + k$$

مثال «١» : أوجد جميع المشتقات المضادة للدالة

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

(الحل) :

نتذكر ان مشتقة $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ هي

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

وعليه فان جميع المشتقات المضادة للدالة

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

هي من نمط

$$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + k$$

حيث ان K عدد ثابت .

في المثال السابق ربما تسأل كيف علمنا ان نختار الدالة $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$. الاجابة عن هذا السؤال في شقين ، الأول هو اننا نعلم ان

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

أو بعبارة أخرى أن عملية التفاضل تنقص الأس بمقدار واحد . وبما ان عملية ايجاد المشتقة المضادة هي عملية عكسية لعملية التفاضل . فاذا عملية ايجاد المشتقة المضادة تزيد الأس بمقدار واحد . أي اننا الآن تعلمنا كيفية ايجاد الجزء $x^{\frac{3}{2}}$ في $\frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}$. اما الجزء الثاني من الاجابة فاننا نحتاج العامل $\frac{2}{3}$ لأننا بحاجة اليه للحصول على $x^{\frac{1}{2}}$ لا على $\frac{3}{2}\ x^{\frac{1}{2}}$ عند اجراء عملية التفاضل لـ $x^{\frac{3}{2}}$.

بما ان

$$\frac{d}{dx}\ x^{n+1} = (n+1)\,x^{n}$$

لأي عدد حقيقي n ، فان

جميع المشتقات المضادة لـ x^n هي $$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$ حيث ان k عدد ثابت و $n \neq -1$.

أما في حالة $n = -1$ فالمطلوب ايجاد جميع المشتقات المضادة للدالة

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

ولكننا نتذكر ان مشتقة الدالة اللوغاريتمية $\ln x$ هي $\frac{1}{x}$

وعليه فان

المشتقات المضادة لـ $\frac{1}{x}$ هي $$\ln x + k$$ حيث k عدد ثابت

(١٥ - ٢) التكامل غير المحدد :

ندرس في هذا الفصل النوع الأول من التكامل وهو التكامل غير المحدد . اليك الآن التعريف التالي :

تعريف :

اذا كانت F مشتقة مضادة للدالة f فان التكامل غير المحدد للدالة f هو

$$\int f(x)\, dx = F(x) + k$$

حيث ان k عدد ثابت يسمى ثابت التكامل .

وواضح من التعريف ان التكامل غير المحدد ليس إلا رمزاً لجميع المشتقات المضادة للدالة . ويسمى الرمز $\int$ اشارة التكامل وتبين ان علينا اجراء عملية عكسية لعملية التفاضل للدالة f(x) داخل إشارة التكامل و dx تشير إلى أن هذه العملية يجب إجراءها بالنسبة إلى المتغير x. وتسمى الدالة f (integrand) فيما يلي بعض الأمثلة :

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int x^5\, dx = \frac{x^6}{6} + k$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k$$

نظراً لوجود العلاقة القوية بين عملية التفاضل وعملية التكامل غير المحدد أو عكس عملية التفاضل فاننا نذكر فيما يلي بعض القواعد الخاصة بالتكامل غير المحدد . ويمكن اثباتها جميعاً باجراء عملية التفاضل للدوال المذكورة في الجهات اليمنى .

اذا كان c عدداً حقيقياً فان

$$\int c\, dx = cx + k \qquad (1)$$

فمثلاً

$$\int 5\, dx = 5x + k$$

ولأي عدد حقيقي n، $n \neq -1$

$$\int x^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \qquad (2)$$

كأمثلة على هذه القاعدة عندنا

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$$

$$\int x^{\pi} dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + k$$

بما أن

$$\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

فاذا

$$\int e^{x} dx = e^{x} + k \qquad (3)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \qquad (4)$$

يمكن الاستفادة من القاعدتين التاليتين عند استعمالهما مع القواعد الأربعة السابقة في ايجاد التكامل المحدد .

نظرية :

التكامل غير المحدد لمجموع دالتين (أو الفرق بينهما) يساوي مجموع (أو الفرق بين) التكاملات غير المحددة للدالتين .

أي أن

$$\int [\, f(x) + g(x) \,]\, dx = \int f(x)\, dx \mp \int g(x)\, dx \qquad \ldots .(I)$$

فمثلا

$$\int (x^2 + x^3)\, dx = \int x^2\, dx + \int x^3\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + k$$

نظرية :

التكامل غير المحدد لعدد ثابت c مضروب في f(x) يساوي حاصل ضرب c في التكامل غير المحدد لـ f(x) .

أي أن

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx \quad \text{c عدد ثابت} \qquad \ldots (II)$$

فمثلا

$$\int 3x^4\, dx = 3\int x^4\, dx = 3\,\frac{x^5}{5} + k = \frac{3x^5}{5} + k$$

حيث أن k عدد حقيقي ثابت .

النظرية (I) صحيحة ايضاً لمجموع (فرق بين) ثلاث دوال .

مثال « ٢ » :

أوجد قيمة

$$\int \left(7x^5 + \frac{1}{2x} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

(الحل)

$$\int \left(7x^5 + \frac{1}{2x} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int 7x^5\, dx + \int \frac{1}{2x}\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 7\int x^5\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, 2\, dx$$

$$= \frac{7x^6}{6} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^{3/2}}{3/2} + k$$

$$= \frac{7}{6}x^6 + \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2} \text{ x } 3/2 + k$$

مثال « ٣ » :

أوجد قيمة

$$\int \frac{15\,dx}{x^5}$$

(الحل)

نستنتج من (II) أن

$$\int \frac{15}{x^5} dx = 15\int \frac{1}{x^5} dx$$

باستخدام (2) نحصل على

$$\int \frac{15\,dx}{x^5} = 15\int \frac{1}{x^5} dx = 15\int x^{-5} dx = \frac{15x^{-4}}{-4} + k = \frac{-15}{4x^4} + k$$

مثال « ٤ » :

أوجد قيمة

$$\int (x^2 + 3e^x)\,dx$$

(الحل)

$$\int (x^2 + 3e^x)\,dx = \int x^2 dx + \int 3e^x dx$$

$$= \int x^2 dx + 3\int e^x dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3e^x + C$$

حيث أن c عدد ثابت .

مثال « ٥ » :

أوجد قيمة

$$\int (2x - 3)(5x + 1)\, dx$$

(الحل)

لايجاد قيمة التكامل غير المحدد يجب فك المقدار

$$(2x - 3)(5x + 1) = 10x^2 - 13x - 3$$

وعليه فان

$$\int (2x - 3)(5x + 1)\, dx = \int (10x^2 - 13x - 3)\, dx$$

$$= \int 10x^2\, dx - \int 13x\, dx - \int 3dx$$

$$= 10\int x^2 dx - 13\int x\, dx - \int 3dx$$

$$= 10 . \frac{x^3}{3} - 13 . \frac{x^2}{2} - 3x + k$$

$$= \frac{10x^3}{3} - \frac{13x^2}{2} - 3x + K$$

حيث أن k ثابت التكامل .

مثال « ٦ » :

أوجد قيمة

$$\int \frac{1 + 2x^4}{x}\, dx$$

(الحل)

لا يمكن ايجاد قيمة التكامل للدالة في الصورة المعطاة ولكن كتابة

$$\frac{1 + 2x^4}{x}$$

بشكل

$$\frac{1}{x} + 2x^3$$

يساعدنا على اجراء عملية التكامل .

وعليه فان

$$\int \frac{1+2x^4}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 2x^3\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int 2x^3 dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + 2\int x^3 dx$$

$$= \ln x + 2 . \frac{x^4}{4} + k$$

$$= \ln x + \frac{x^4}{2} + k$$

حيث أن k هو ثابت التكامل .

تمارين (١) :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

1. $\int 3dx$
2. $\int -4\,dx$
3. $\int x dx$
4. $\int x^2 dx$
5. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$
6. $\int x^{\frac{4}{3}} dx$
7. $\int x^{-2} dx$
8. $\int x^{-3} dx$
9. $\int x^{-\frac{1}{2}}$
10. $\int x^{-\frac{2}{3}} dx$
11. $\int (x^2 + 2e^x) dx$
12. $\int (3x + 5e^x) dx$
13. $\int (x - 1/x) dx$
14. $\int (x + 1/x) dx$

15. $\int (3\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})\,dx$

16. $\int (2\sqrt{x} - 4/\sqrt{x})\,dx$

17. $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2}\,dx$

18. $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,dx$

19. $\int x(x - 1)\,dx$

20. $\int x(x + 2)\,dx$

21. $\int \frac{3x^4 + 2}{x}\,dx$

22. $\int \frac{x^6 + x^2 + 1}{x^1}\,dx$

23. حقق أن

(a) $\int (x \cdot \sqrt{x})\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int \sqrt{x}\,dx$

(b) $\int x(x^2 + 1)\,dx \neq x\int (x^2 + 1)\,dx$

(c) $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,dx \neq \frac{\int (x^2 - 1)\,dx}{\int (x - 1)\,dx}$

(١٥ ـ ٣) التكامل بالتعويض :

التكاملات غير المحددة التي لا يمكن ايجاد قيمها باستخدام القواعد (1) الى (3) من الفصل الثاني يمكن ايجاد بعضها بطريقة التعويض (Substitution) والطريقـة تتلخص باجراء تعويض يحول التكامل المعطي الى تكامل آخر يمكن ايجاد قيمته باستخدام القواعد الأربعة المذكورة أعلاه .

فمثلا لايجاد قيمة التكامل غير المحدد

$$\int (x^2 + 5)^3 \, 2x \, dx$$

تستخدم التعويض

$$u = x^2 + 5$$

اذا

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

أو

$$du = 2x \, dx$$

بعد اجراء هذا التعويض نحصل على

$$\int (x^2 + 5)^3 \, 2x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(x^2 + 5)^4}{4} + k$$

مثال « ١ » :

أوجد قيمة

$$\int e^{2x+1} \, dx$$

(الحل)

لايجاد قيمة التكامل تستخدم التعويض

$$u = 2x + 1$$

اذا

$$\frac{du}{dx} = 2$$

اذا

$$du = 2\,dx$$

وعليه فان

$$\int e^{2x+1}\,dx = \int e^{u}\,1/2\,du = 1/2\,e^{u} + k = 1/2\,e^{2x+1} + k$$

تلاحظ مما سبق أن المشتقة $\frac{du}{dx}$ عوملت كأنها نسبة du الى dx . عند معاملة المشتقة بهذه الصورة يسمى du (Differential) u أو تفاضل u ويسمى dx تفاضل x .

مثال « ٣ » :

أوجد قيمة

$$\int e^{-x}\,dx$$

(الحل)

نستخدم هنا التعويض

$$u = -x$$

اذا

$$\frac{du}{dx} = -1$$

و

$$du = -dx$$

اذا

$$\int e^{-x}\,dx = \int e^{u}\,(-du)$$

$$= -\int e^u du$$

$$= -e^u + k$$

$$= -e^{-x} + k$$

مثال « ٣ » :

أوحد قيمة

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

الحل :

نستخدم التعويض

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

اذا

$$du = 2x\,dx$$

و

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,du$$

وعليه فان

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \int \sqrt{u}\,.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + k = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + k$$

يجب ان يلاحظ القارىء ان في استعمال التعويض

$$u = x^2 + 1$$

يجب ان يتم التعويض لا عن الدالة اللازم تكاملها فقط بل كذلك يجب ان يتم التعويض عن dx . في الحقيقة وجود x مع الدالة اللازم تكاملها يجعل عملية التعويض ناجحة في ايجاد قيمة التكامل . لاحظ في المثال التالي عدم وجود x مع الدالة اللازم تكاملها بجعل التعويض

$$u = x^2 + 1$$

يحوّل التكامل الأصلي الى تكامل اكثر تعقيداً .

مثال « ٤ » :

اوجد قيمة

$$\int (x^2 + 1)^3 \, dx$$

الحل :

لنحاول اولاً استعمال التعويض

$$u = x^2 + 1$$

اذا

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

و

$$du = 2x \, dx$$

أو أن

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{u^2 - 1}} \, du$$

وعليه فان

$$\int (x^2 + 1)^3 \, dx = \int u^3 \frac{1}{2\sqrt{u - 1}} \, du$$

ولكن التكامل في الجهة اليمنى اكثر تعقيداً من التكامل في الجهة اليسرى . وعليه فان عملية التعويض غير مجدية .

في هذه الحالة يجب فك المقدار

$$(x^2 + 1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

اذا

$$\int (x^2 + 1)^3 dx = \int (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) dx$$

$$= \int x^6 dx + \int 3x^4 dx + \int 3x^2 dx + \int 1dx$$

$$= \int x^6 dx + 3\int x^4 dx + 3 \int x^2 dx + \int 1dx$$

$$= \frac{x^7}{7} + 3 . \frac{x^5}{5} + x^3 + x + k$$

ان الفكرة في طريقة التعويض هي الحصول على تكامل آخر أبسط من التكامل الأصلي . عندما يظهر ان تعويضاً ما لا يفي بهذا الغرض فيجب محاولة تعويض آخر . واذا لم يكن بالاستطاعة الحصول على تعويض يؤدي الى تبسيط التكامل فيجب محاولة استعمال طرق تكامل اخرى . بما ان عملية التكامل ، بخلاف عملية التفاضل ، ليس فيها طرق او خطوات محددة يجب ان يقوم القارىء بكثير من التمرين .

مثال « ٥ » :

اوجد قيمة

$$\int x \sqrt{4 + x} \quad dx$$

الحل :

التعويض الأول : ضع

$$u = 4 + x$$

اذا

$$du = dx$$

وعليه فان

$$\int x\sqrt{4+x}\,dx = \int (u-4)\sqrt{u}\,.\,du = \int (u^{3/2} - 4u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{4u^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2(4+x)^{5/2}}{5} - \frac{8(4+x)^{3/2}}{3} + k$$

التعويض الثاني :

افرض ان

$$u^2 = 4 + x$$

اذا

$$2u\,du = dx$$

وعليه فان

$$\int x\sqrt{4+x}\,dx = \int (u^2-4)\,u\,.\,2u\,du = 2\int (u^4 - 4u^2)\,du$$

$$= \frac{2u^5}{5} - \frac{8u^3}{3} + K = \frac{2(4+x)^{5/2}}{5} - \frac{8(4+x)^{3/2}}{3} + K$$

واضح من المثال السابق انه ليس هناك طريقة أو خطوات محددة لاجراء عملية التكامل بعكس ما كان في عملية التفاضل التي كانت تجري بخطوات محددة .

مثال (٦) :

أوجد قيمة

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$$

(الحل) :

نستعمل التعويض

$$u = 1 + \sqrt{x},\; du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

اذا

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}\, du =$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} + k = \frac{-1}{2u^2} + k$$

$$= \frac{-1}{2(1+\sqrt{x})^2} + k$$

مثال «٧» :

أوجد قيمة

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

(الحل) :

ضع

$$u = \ln x$$

اذا

$$du = 1/x\, dx$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + k = .\ln(\ln x) + k$$

تمارين (٢) :

أوجد كلا مما يأتي :

1. $\int (2x+1)^5\, dx$
2. $\int (3x-5)^4\, dx$
3. $\int e^{2x-3}\, dx$
4. $\int e^{4x+4}\, dx$
5. $\int (-2x+3)^{-2}\, dx$
6. $\int (5-2x)^{-3}\, dx$

7. $\int (x^2 + 4)^2 x \, dx$

8. $\int (x^2 - 2)^3 x \, dx$

9. $\int e^{x^3 + 1} x^2 \, dx$

10. $\int e^{2x^2 + 1} x dx$

11. $\int (e^x + e^{-x}) \, dx$

12. $\int (e^x - e^{-x}) \, dx$

13. $\int (x^3 + 2)^5 x^2 \, dx$

14. $\int (x^3 - 1)^4 x^2 \, dx$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$

16. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

17. $\int x \sqrt{x + 3} \, dx$

18. $\int x \sqrt{x - 3} \, dx$

19. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

20. $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 4} \, dx$

21. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}}$

22. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x^{2/3}} \, dx$

23. $\int \frac{(x^{1/3} - 1)^5 \, dx}{x^{2/3}}$

24. $\int \frac{(x^{1/3} + 2)^3}{x^{2/3}} \, dx$

25. $\int \frac{(x + 1) \, dx}{(x^2 + 2x + 3)^2}$

26. $\int \frac{(x + 4) \, dx}{(x^2 + 8x + 2)^3}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt{x})^4}$

28. $\int \frac{(3 - 2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} \, dx$

29. $\int \frac{dx}{2x + 3}$

30. $\int \frac{dx}{3x - 5}$

31. $\int \frac{x \, dx}{4x^2 + 1}$

32. $\int \frac{x \, dx}{5x^2 - 2}$

33. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

34 $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 4} \, dx$

(١٥ ـ ٤) التكامل المحدد :

ننتقل الآن الى المفهوم الأساسي الثاني لحساب التكامل وهو التكامل المحدد (Definite Integral) . الغرض من هذا الفصل اعطاء المفهوم بصورة مبسطة

تعريف :

لتكن الدالة f متصلة في الفترة I ولتكن F مشتقة مضادة للدالة f . لكل $a \in I$ و $b \in I$ يسمى

$$F(b) - F(a)$$

بالتكامل المحدد من a الى b للدالة f

فمثلاً التكامل المحدد من 2 الى 3 للدالة

$$f(x) = x^2$$

يمكن حسابه بايجاد مشتقة مضادة للدالة f أولاً . احدى المشتقات المضادة هي

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

اذا التكامل المحدد من 2 الى 3 لـ x^2 هو

$$F(3) - F(2) = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

يستعمل الرمز

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

لتمثيل التكامل المحدد من a الى b للدالة f . في المثال السابق

$$\int_{2}^{3} x^2\,dx = \frac{19}{3}$$

في الرمز

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

يسمى a و b الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل على التوالي . في حساب قيمة

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

لا تعتمد قيمة التكامل المحدد على احتيار المشتقة المضادة . في الحقيقة اذا كانت كل من F و G مشتقة مضادة للدالة f فنعلم ان

$$G(x) = F(x) + k$$

وعليه فان

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\,dx &= F(b) - F(a)\\ &= [F(b) + k] - [F(a) + k]\\ &= G(b) - G(a)\end{aligned}$$

وعليه فان باستطاعتنا استعمال أي من المشتقات المضادة للدالة f في ايجاد قيمة التكامل المحدد

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

واذا كانت F هي احدى هذه المشتقات المضادة فان

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ولتسهيل عملية الحساب نستخدم الترميز

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) = F(a)$$

بالنسبة لهذا الترميز الجديد ، لحساب قيمة

$$F(x)\Big|_a^b$$

استبدلx بالقيمة العلياb أولاً لايجاد(b) F ثم اطرح(a) F باستبدالx بالحد الادنى a .

فمثلاً

$$(3x^2+2)\Big|_{-1}^{5} = [3(5)^2+2] - [3(-1)^2+2] = 72$$

مثال «١» :

أوجد قيمة

$$\int_1^2 x^3\,dx$$

(الحل) :

بما ان $\frac{x^4}{4}$ مشتقة مضادة لـ x^3

اذا

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{15}{4}$$

من المهم التمييز بين التكامل غير المحدد والتكامل المحدد . فالتكامل غير المحدد هو رمز لجميع المشتقات المضادة لدالة ما ، وكل مشتقة مضادة عبارة عن دالة بينما التكامل المحدد عبارة عن عدد .

مثال «٢» :

أوجد قيمة

$$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$$

(الحل) :

بما ان $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ مشتقة مضادة لـ$\sqrt{x}$ فاذا

$$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

فيما يلي بعض الخواص المهمة للتكامل المحدد .

١ ـ اذا كانت f دالة متصلة في الفترة [a,b] ولها مشتقة مضادة في [a,b]

فان

$$(a) \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$(b) \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

فمثلاً

$$\int_4^1 \sqrt{x} dx = -\int_1^4 \sqrt{x} dx = -\frac{14}{3} \qquad \int_1^1 x dx = 0$$

٢ ـ اذا كانت f دالة متصلة ولها مشتقة مضادة في [a,b] و c عدد بين a و b فان

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

٣ ـ اذا كانت f دالة متصلة ولها مشتقة مضادة في [a,b] و c عدد حقيقي ثابت فان

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$$

فمثلاً

$$\int_1^2 16x^2\,dx = 16\int_1^2 x^2\,dx = 16\left[\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right] = 16\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 16 . \frac{7}{3} = \frac{112}{3}$$

٤ ـ اذا كانت كل من f و g دالة متصلة ولها مشتقة مضادة في الفترة [a,b] فان

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx}$$

فمثلاً

$$\int_1^2 (x^2 + \sqrt{x})\,dx = \int_1^2 x^2\,dx + \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{3}$$

مثال (٣) :

أوجد قيمة

$$\int_1^2 3x(x^2 - 1)\,dx$$

(الحل) :

$$\int_1^2 3x(x^2 - 1)\,dx = \int_1^2 (3x^3 - 3x)\,dx = \int_1^2 3x^3\,dx - \int_1^2 3x\,dx$$

$$= 3\int_1^2 x^3\,dx - 3\int_1^2 x\,dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\Big|_1^2\right] - 3\left[\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right]$$

$$= 3\left[4 - \frac{1}{4}\right] - 3\left[2 - \frac{1}{2}\right] = 3\left(\frac{15}{4}\right) - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{27}{4}$$

تمارين (٣) :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

1. $\int_{1}^{2} (3x - 1)\,dx$
2. $\int_{1}^{2} (2x + 1)\,dx$
3. $\int_{0}^{1} (3x^2 + e^x)\,dx$
4. $\int_{2}^{5} (e^x + x^2)\,dx$
5. $\int^{1} \sqrt{u}\,du$
6. $\int_{1}^{4} \sqrt{u}\,du$
7. $\int_{0}^{1} (t^2 - t^{3/2})\,dt$
8. $\int_{1}^{4} (\sqrt{x} - a^2 x)\,dx$
9. $\int_{-2}^{1} (x - 1)(x + 3)\,dx$
10. $\int_{0}^{1} (z^2 + 1)^2\,dz$
11. $\int_{1}^{2} \frac{x^2 - 1}{x^4}\,dx$
12. $\int_{1}^{2} \frac{2 - x^2}{x^4}\,dx$
13. $\int_{1}^{4} \left(\sqrt[3]{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt$
14. $\int_{1}^{4} \left[\sqrt{u} + \frac{1}{u}\right]du$
16. $\int_{1}^{5} \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$
15. $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x} + 1}{x^3}\,dx$
17. $\int_{-1}^{1} (x + 1)^2\,dx$
18. $\int_{-1}^{3} (x + 1)^3\,dx$
19. $\int_{1}^{e} \left(x - \frac{1}{x}\right)dx$
20. $\int_{1}^{e} \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$
21. $\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx$
22. $\int_{-4}^{2} e^{-7x/2}\,dx$
23. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x + 1}$
24. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x \ln x}$
25. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{(x^{\frac{1}{2}} + 1} dx$

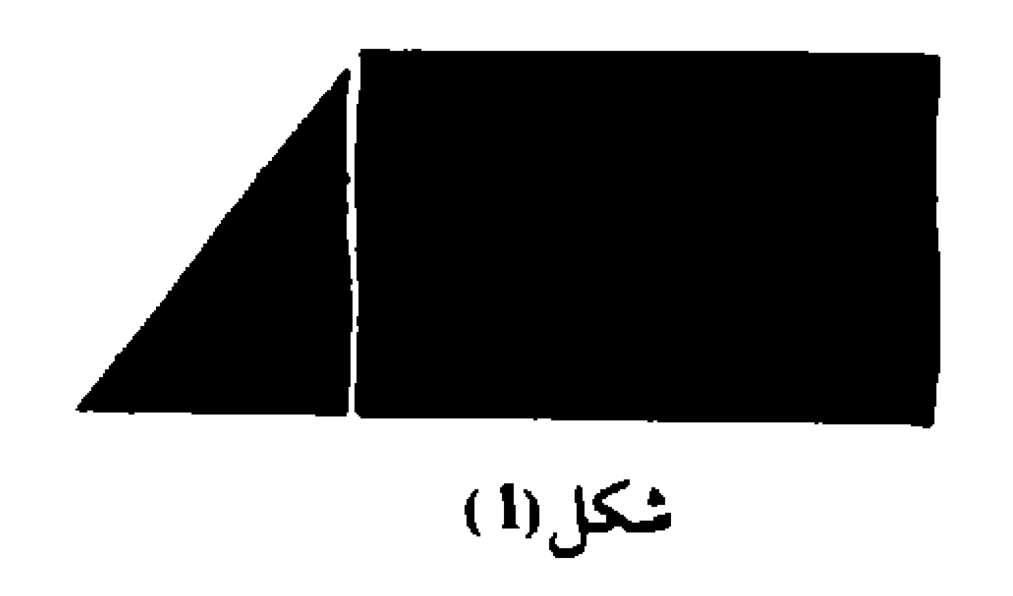
(١٥ ـ ٥) المساحة تحت منحني Area Under a Curve :

في هذا الفصل سوف نوضّح كيف ان المشتقة المضادة والتكامل المحدد والمساحة تحت منحني مترابطة مع بعضها البعض . ما المقصود بالمساحة ؟ تعلمنا في الهندسة المستوية كيفية ايجاد مساحة بعض الأشكال الهندسية مثل.المربّع والمستطيل والدائرة ، فمثلاً مساحة المربّع الذي طول ضلعه (3) أقدام هي (9) أقدام مربّعة . السبب هو أنه يمكن تقسيم المربع الى تسعة مربّعات صغيرة طول ضلع كل منها 1 قدم .

وكذلك تعلّمنا ان مساحة المستطيل الذي طوله a من وحدات الطول وعرضه b من وحدات الطول هي a.b من الوحدات المربّعة .

جميع مشاكل المساحة (سواء أكانت ايجاد مساحة مربع أو مستطيل أو دائرة أو شبه منحرف) لها خاصية مشتركة ، فمثلاً عند حساب مساحة أي شكل فيعبر عنها بعدد من الوحدات المربعة . وهذا العدد لا يمكن ان يكون عدداً سالباً . وعليه فان احدى خواص المساحة هي أنها ليست سالبة .

اعتبر الآن شبه المنحرف في (شكل (1)) . وشبه المنحرف هذا مقسم الى شكلين هندسيين غير متداخلين ، مثلث (مساحته A_1) ومستطيل (مساحته A_2) . من الواضح ان مساحة شبه المنحرف هي مجموع $A_1 + A_2$ (مساحتي الجزئين المكوّنين لشبه المنحرف) . وهكذا ما دامت المنطقتان غيرمتداخلتين(باستثناء الحدود المشتركة) يمكن ايجاد المساحة الكلية بجمع مساحات الأجزاء . تسمى هذه الخاصية أحياناً بخاصية التجميع للمساحة .



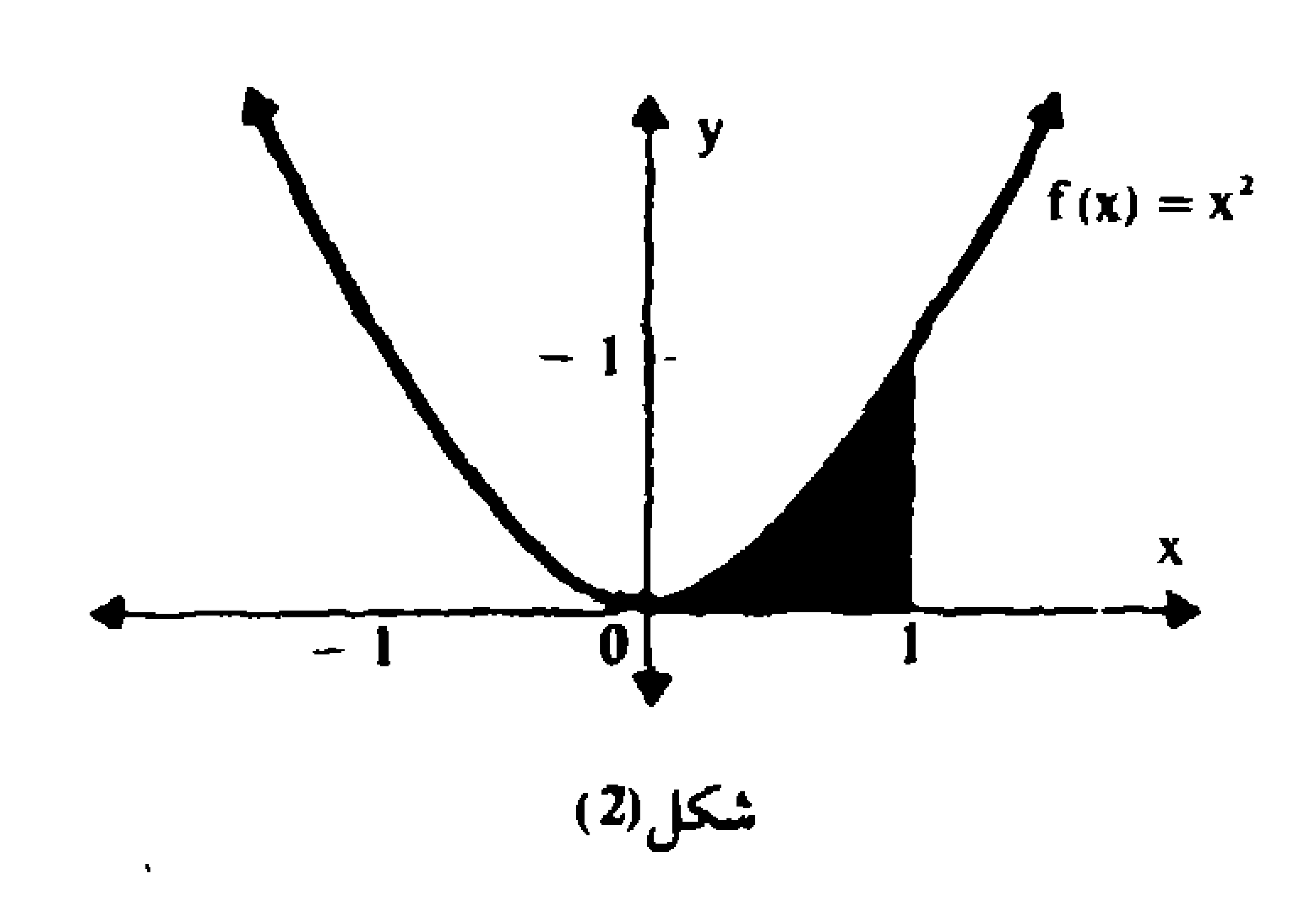
شكل (1)

خواص المساحة :

للمساحة خاصيتان :

(١) غير سالبة .

(٢) اذا كانت A و B منطقتين غير متداخلتين فان المساحة الكلية للمنطقة التي تشملها معاً تساوي مساحة A + مساحة B .



شكل(2)

الخاصيتان السابقتان للمساحة تساعدنا على حساب مساحة المضلعات . أو مساحة أي شكل محدد بخطوط مستقيمة . ولكن حتى الآن لا نستطيع حساب مساحة شكل محدد بمنحني . فمثلاً مشكلة ايجاد المساحة تحت المنحني .

$f(x) = x^2$

من $x = 0$ الى $x = 1$ ، أي بعبارة أخرى مساحة المنطقة المحددة بالدالة

$f(x) = x^2$

ومحور x والخط العمودي $x = 1$ لا يمكن حلها باستخدام طرق الهندسة (انظر شكل (2)) .

النتيجة التالية تعطى طريقة حساب المساحات كالمساحة في شكل 2 .

نظرية 1 :

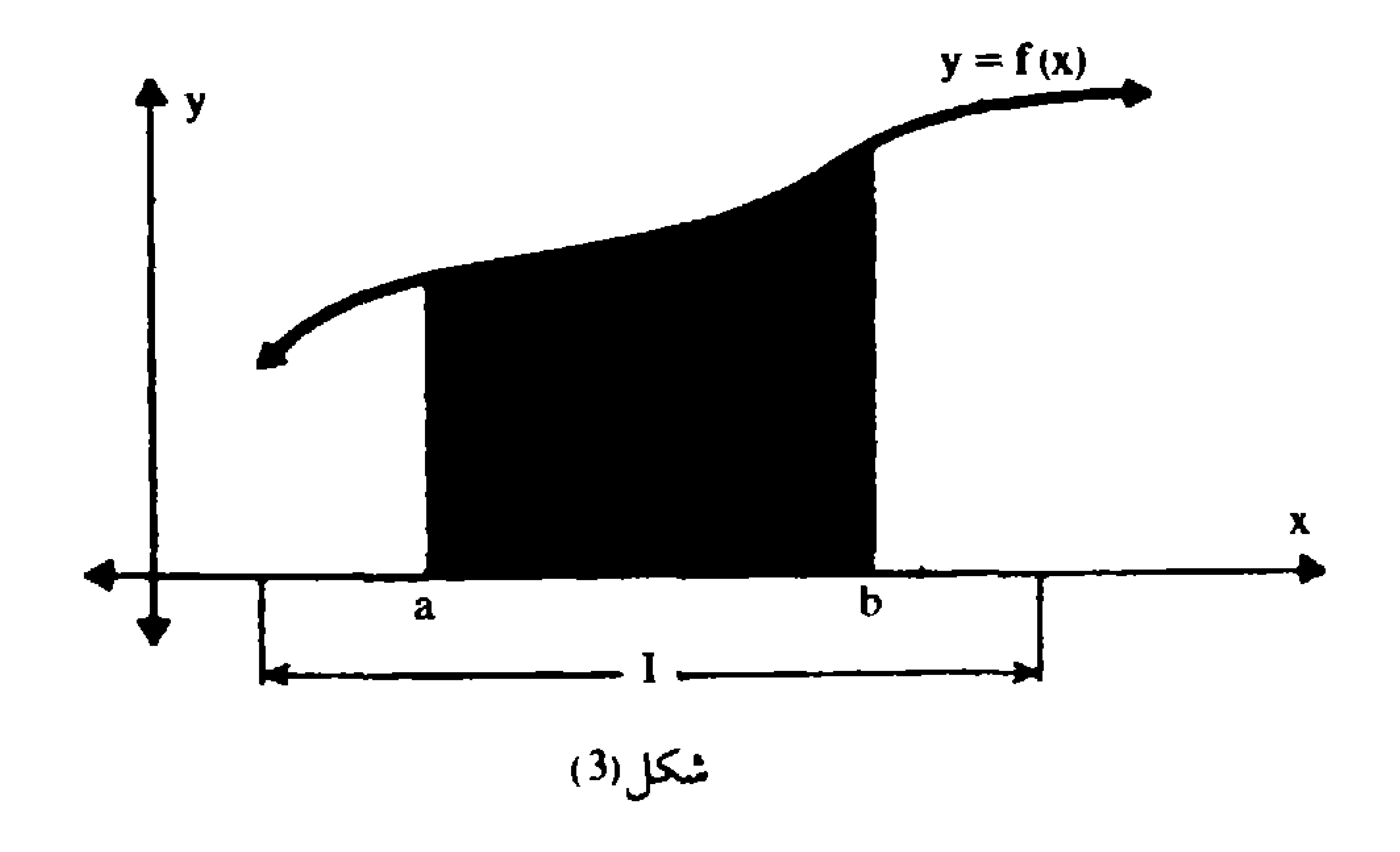
اذا كانت f دالة متصلة في الفترة I وكانت

$f(x) \geqslant 0$

لجميع النقاط x في I ، فلكل $a \in I, b \in I$ ، التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

هو مساحة المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة f من $x = a$ الى $x = b$. ويوضح شكل(3) النظرية



شكل(3)

نقدّم الآن توضيحاً هندسياً لهذه النظرية .

خذ نقطة x_0 في I بحيث تكون $x_0 < a$ ولتكن نقطة x أية نقطة بحيث $x > x_0$. افرض ان $A(x)$ تشير الى المساحة المحددة بمنحني الدالة f والمحور الأفقي من x_0 الى x (انظر شكل(4)) . نريد ان نثبت ان

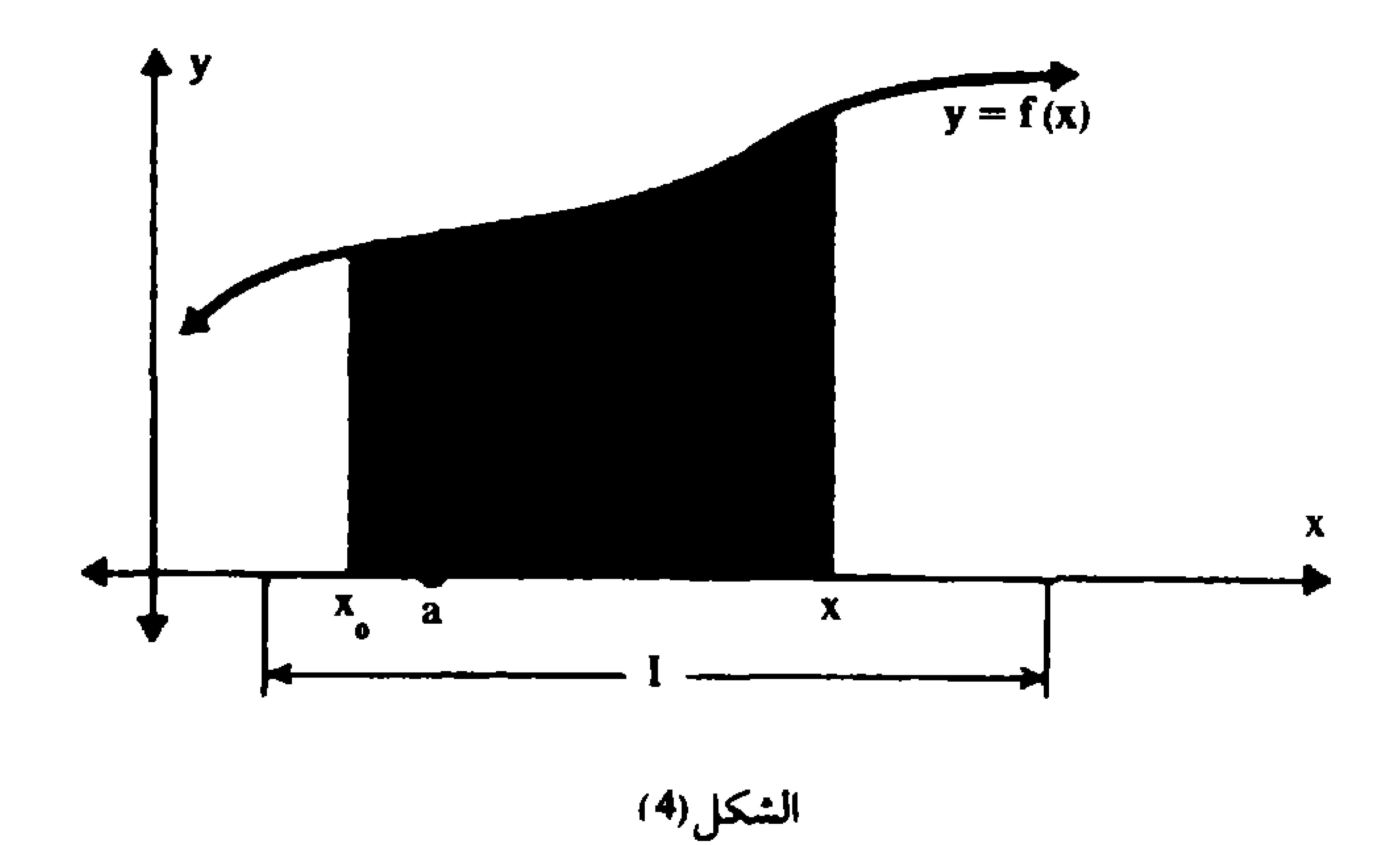
$$A'(x) = f(x)$$

نستخدم تعريف المشتقة . اذا كان $h > 0$ فان $A(x + h)$ تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة f والمحور الأفقي من x_0 الى $x + h$ (انظر شكل(5)) .

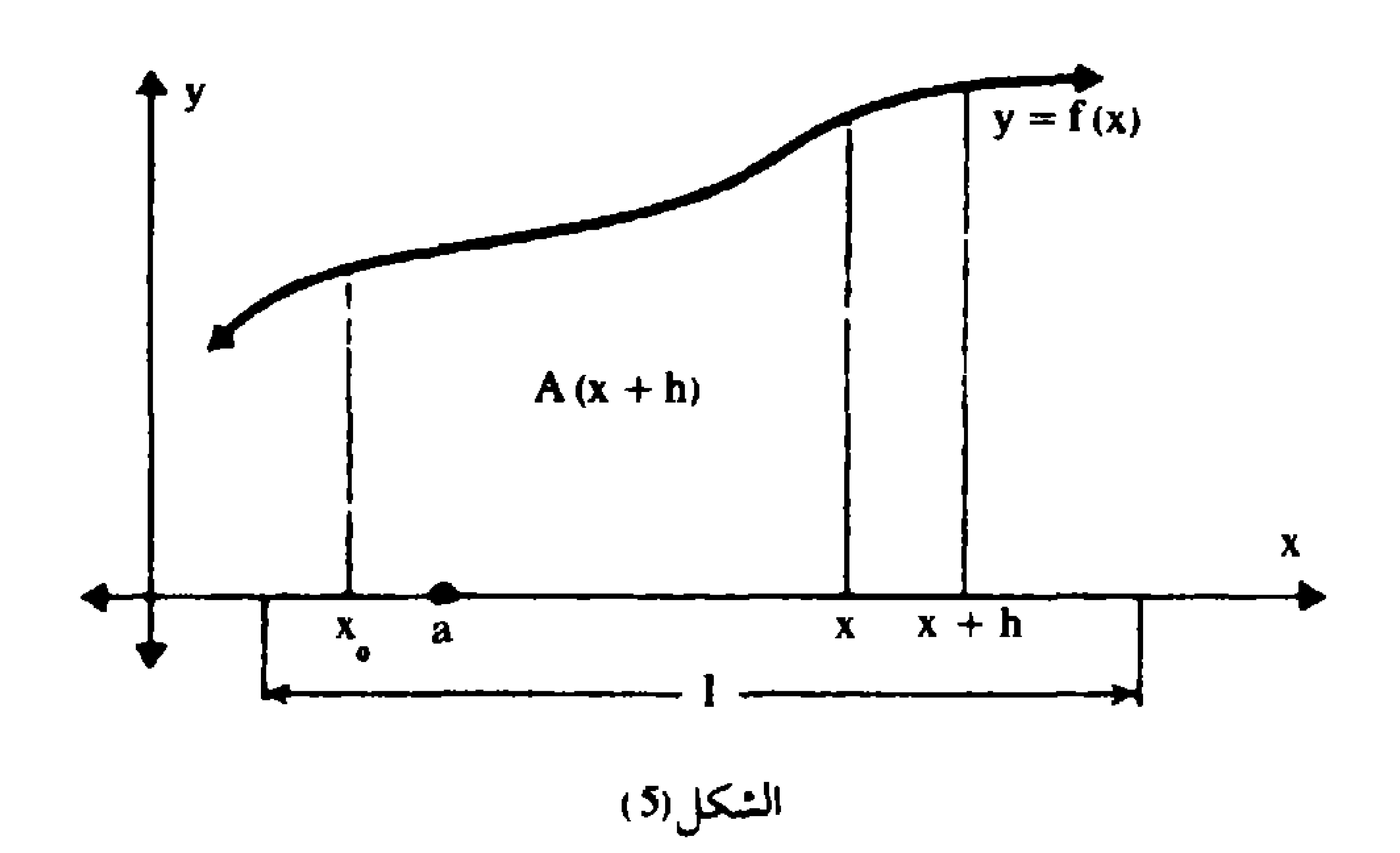
اذا

$$A(x + h) - A(x)$$

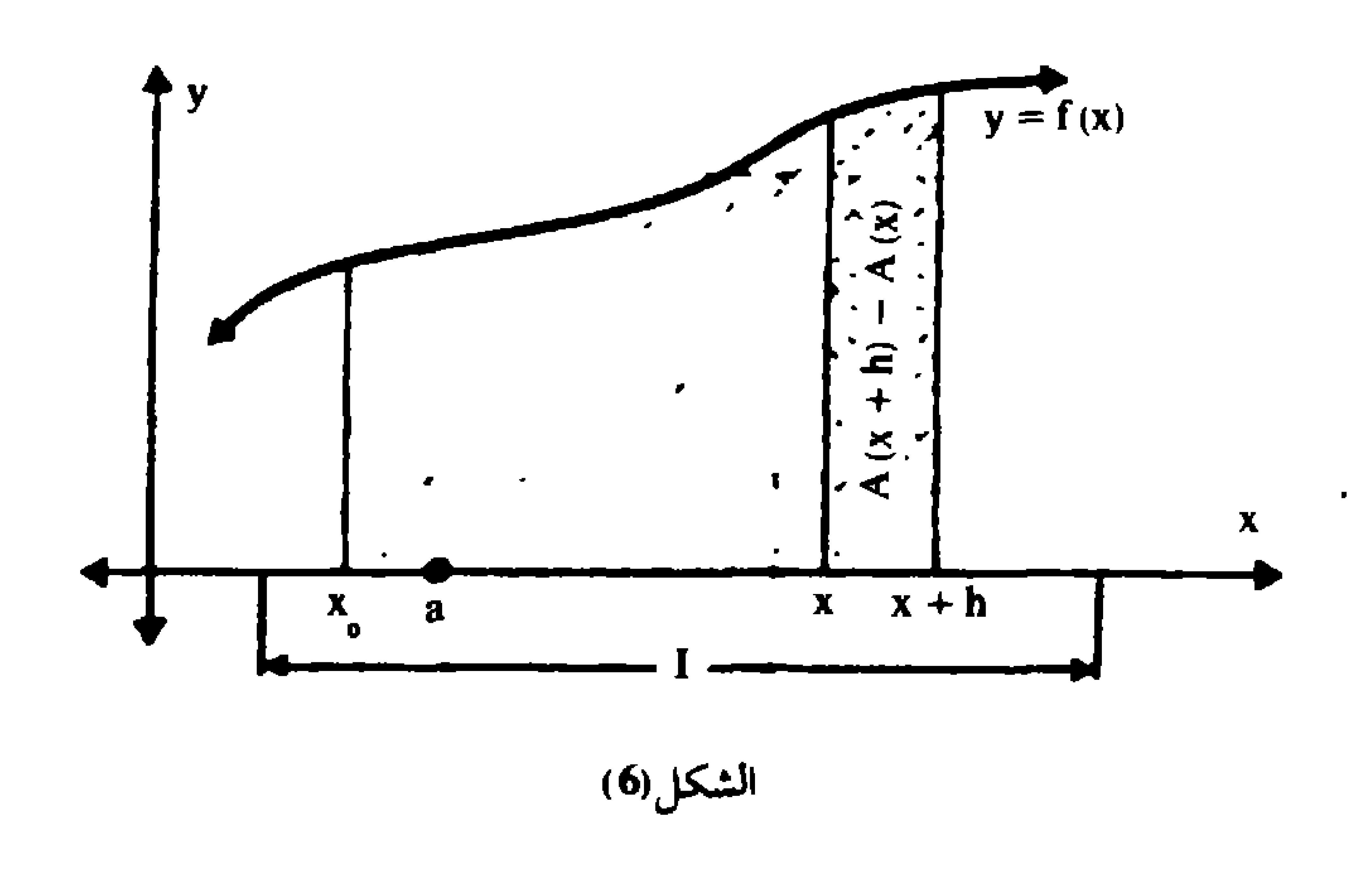
تمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة f والمحور الأفقي من x الى $x + h$ (انظر شكل(6)) .



الشكل(4)



الشكل(5)



الشكل(6)

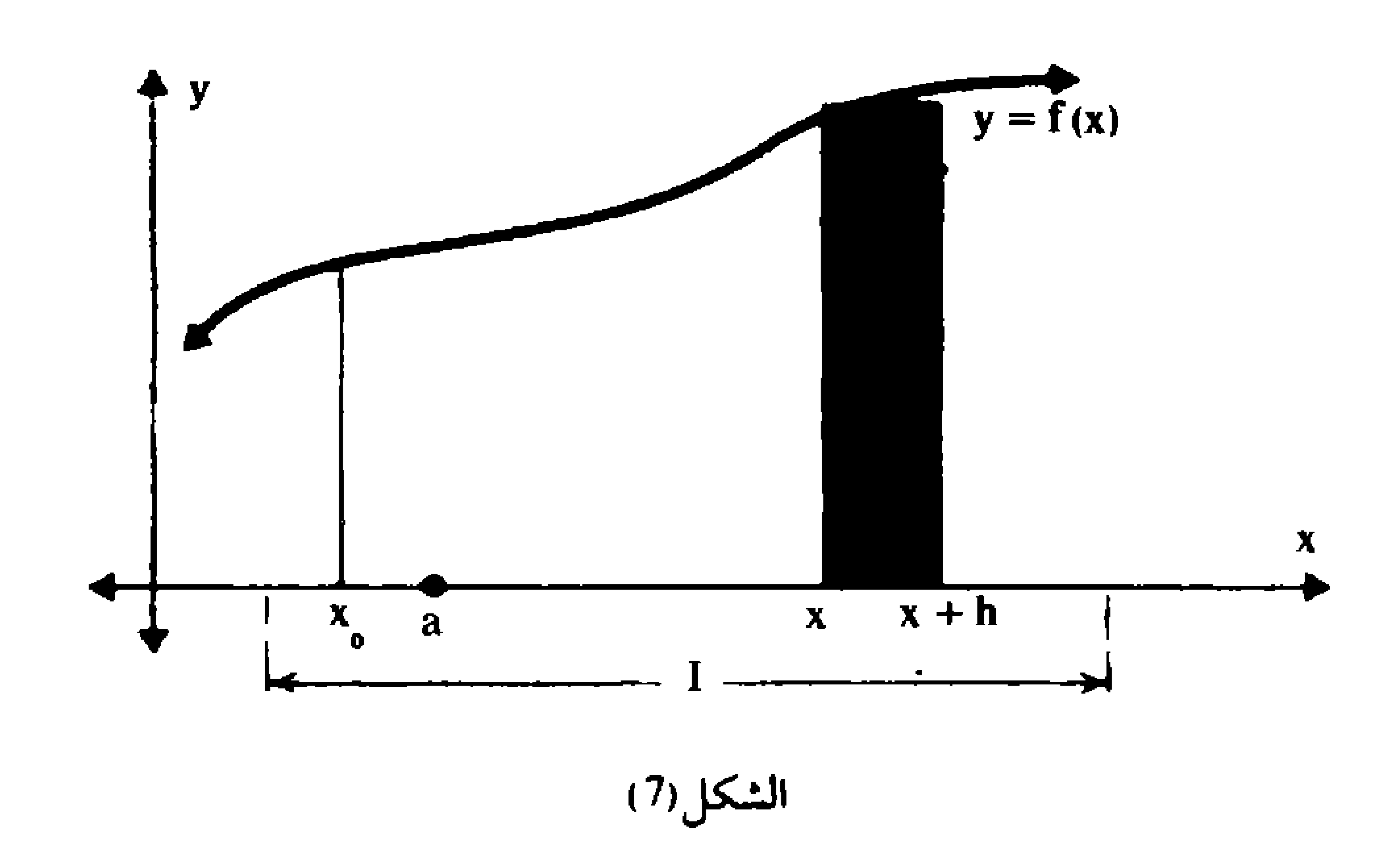
ارسم الآن مستطيلاً قاعدته h ومساحته

$A(x+h) - A(x)$

فان ارتفاع هذا المستطيل يساوي

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

وذلك لأن هذا المقدار يمثل مساحة المستطيل مقسوماً على القاعـدة (أنظـر شكل 7) .



الشكل(7)

بما ان الدالة f متصلة وبما ان كلا من المستطيل والمنطقة المظللة لها نفس القاعدة ونفس المساحة فان الحافة العليا للمستطيل يجب ان تقطع منحني الدالة .

عندما h تقترب الى الصفر يقترب ارتفاع المستطيل الى f (x) أي ان

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \to f(x)$$

عندما تقترب h الى الصفر من اليمين .

ويمكن اعطاء تفسير مناظر لحالة اقتراب h الى الصفر من اليسار . وعليه فان

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

أي أن

$$A'(x) = f(x)$$

لجميع قيم x في I و $x > x_0$

أو بعبارة أخرى $A(x)$ مشتقة مضادة للدالة f

اذا

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(x)\Big|_a^b = A(b) - A(a)$$

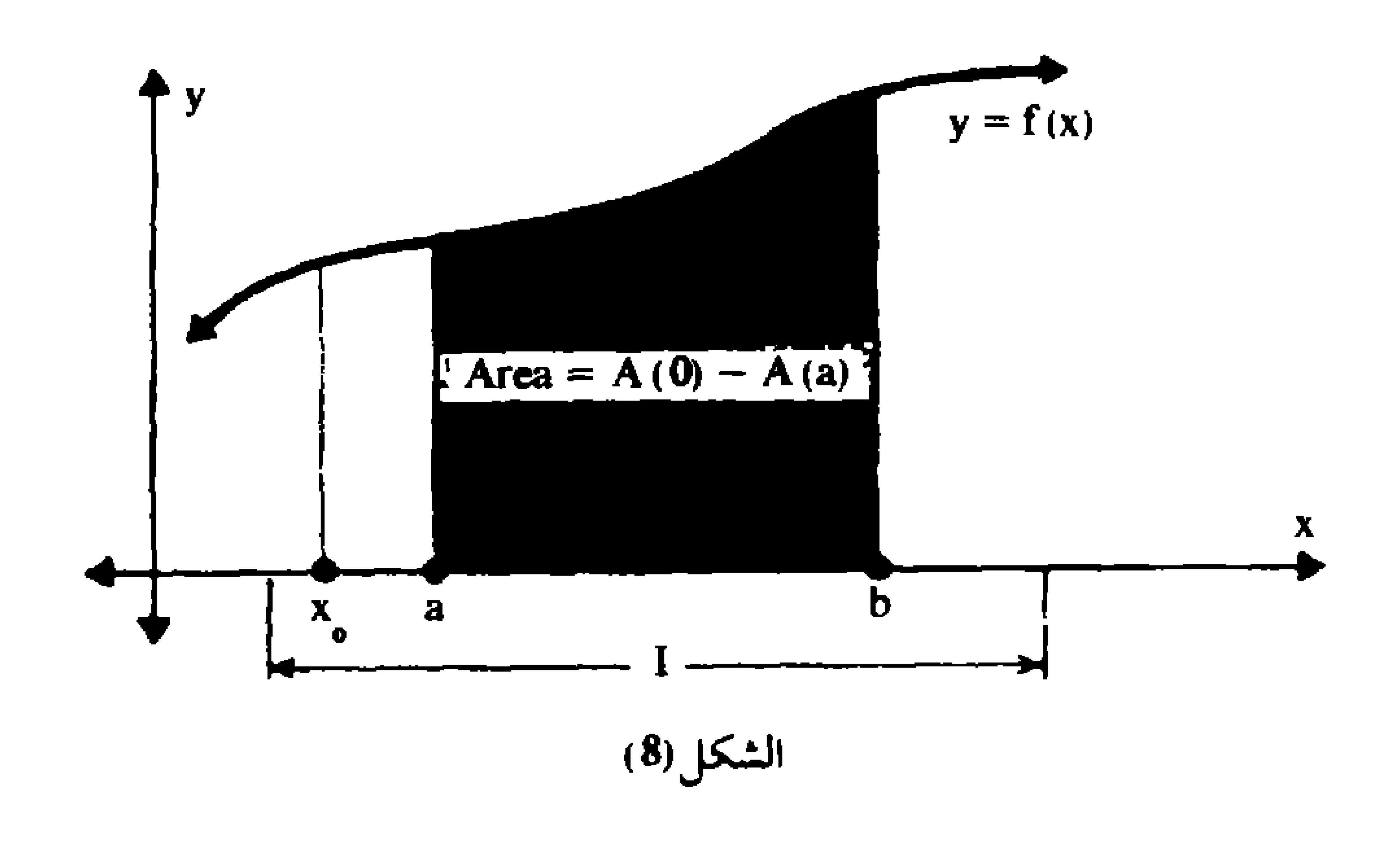
ولكن المساحة التي نحن بصددها هي مساحة المنطقة المحددة لمنحني الدالة f ومحور x من a الى b . بما ان a و b واقعة في I ، اذا المساحة المطلوبة هي

$$A(b) - A(a)$$

(انظر الى شكل 8)

اذا

مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة f ومحور x من a الى b هي $\int_a^b f(x)\,dx$



الشكل (8)

أهمية هذه النتيجة هي أنها تساعدنا على ايجاد مساحة المنطقة الواقعة تحت منحني دالة ما على شرط ان تكون الدالة متصلة وغير سالبة أي أن جميع قيمها في تلك الفترة موجبة أو صفر . وثمة شرط آخر وهو ان يكون للدالة مشتقة مضادة .

نعود الآن الى حل المثال المذكور في (شكل 2) .

مثال «١» :

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة

$$f(x) = x^2$$

ومحور x من $x = 0$ الى $x = 1$

(الحل) :

المساحة هي

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

وهذا يعني ان مساحة المنطقة في (شكل 2) تساوي $\frac{1}{3}$ وحدة مربعة .

أما اذا كان للدالة قيم موجبة وقيم سالبة في نفس الفترة فلا يمكن تطبيق النظرية الأخيرة . افرض ان الدالة متصلة في الفترة $[a,b]$ ولها مشتقة مضادة و c عدد بين a و b و

$$a \leqslant x \leqslant c \qquad f(x) < 0$$

$$c \leqslant x \leqslant b \qquad f(x) > 0$$

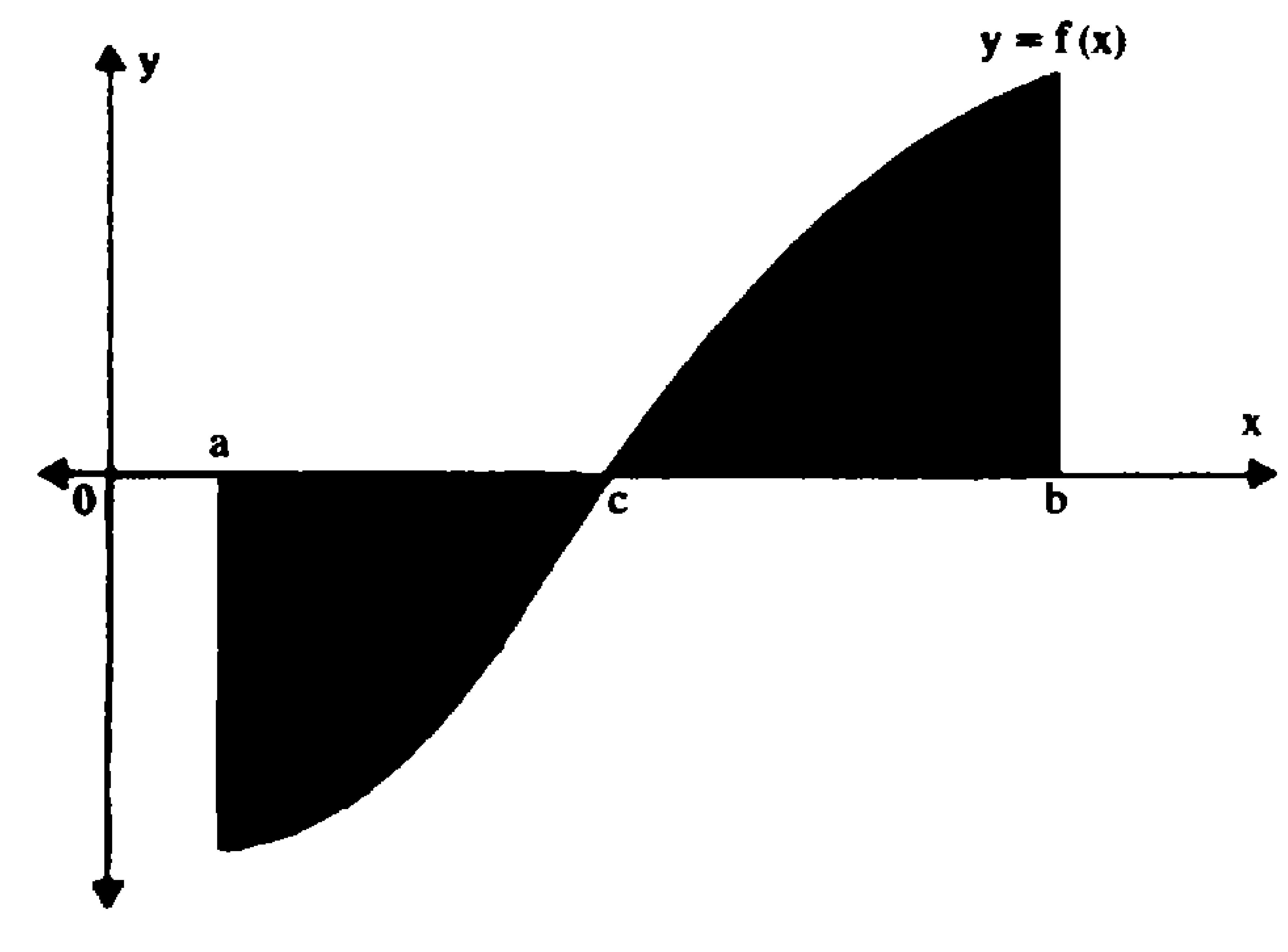
فكيف يمكننا ايجاد المساحة في هذه الحالة ؟

نلاحظ في (شكل 9) ان المنطقة المطلوب مساحتها مكوّنة من جزئين غير متداخلين فاذا كانت مساحة المنطقة كلها A ومساحة الجزئين A_1 و A_2 على التوالي فاننا نعلم من خواص المساحة ان

$$A = A_1 + A_2$$

ونعلم كذلك ان في الفترة $[a,b]$ قيم الدالة موجبة أو صفر وعليه فان

$$A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$



الشكل(9)

لايجاد المساحة A_1 نلاحظ الآن ان

$$f(x) \leqslant 0$$

لجميع قيم x بحيث ان

$$a \leqslant x \leqslant c$$

وعليه فان

$$-f(x) \geqslant 0$$

على هذه الفترة . وتستنتج من هذا ان

$$A_1 = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

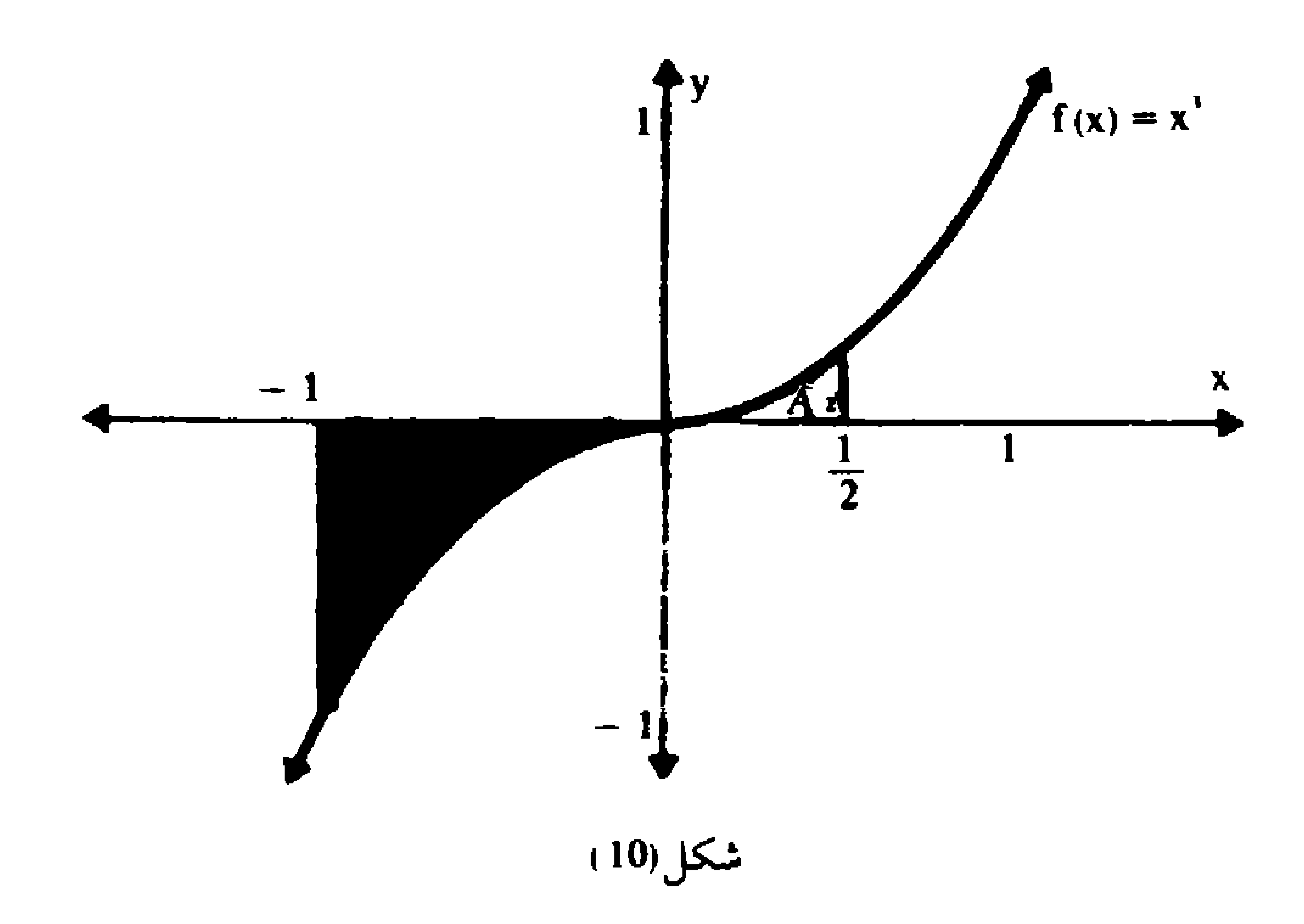
وبهذه الطريقة يمكن ايجاد مساحة جميع المنطقة .

مثال «٢» :

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة

$$f(x) = x^3$$

ومحور x و $x = -1$ و $x = \frac{1}{2}$



شكل(10)

(الحل) :

المنطقة المطلوبة موضحة في (شكل(10)) . لاحظ انها مكونة من جزئين مساحة الجزء الأول A_1 حيث$f(x) < 0$ في الفترة $[-1,0)$ ومساحة الجزء الثاني A_2 حيث $f(x) > 0$ في الفترة $[0, \frac{1}{2})$.

$$A_1 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1/2} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1/2} = \frac{1}{64}$$

و

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{64} = \frac{17}{64}$$

مثال «٣» :

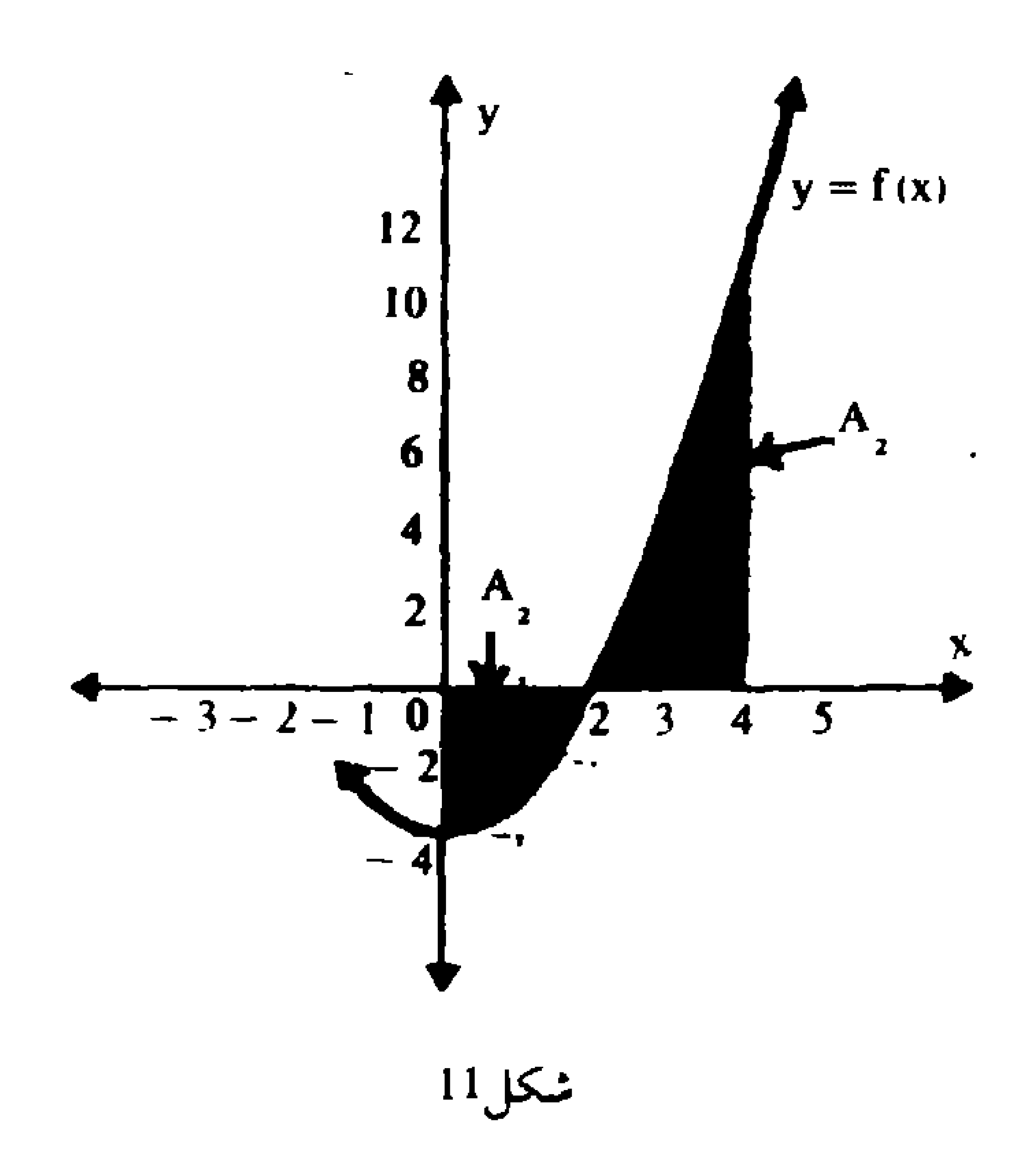
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة

$f(x) = x^2 - 4$

ومحور x من$x = 0$ الى$x = 4$

(الحل) :

في الفترة[0,4] يقطع المنحني محور x في $x = 2$ وذلك



شكل11

لان $f(2) = 0$. وكذلك $f(x) < 0$ من $x = 0$ الى $x = 2$ و $f(x) > 0$ من $x = 2$ الى $x = 4$. المساحات A_1 و A_2 كما هي موضحة في (شكل 11) هي

$$A_1 = -\int_0^2 (x^2 - 4)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \int_2^4 (x^2 - 4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)$$
$$= \frac{56}{3} - 8$$

وعليه فان المساحة المطلوبة هي :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{56}{3} - 8 = \frac{72}{3} - 8 = 16$$

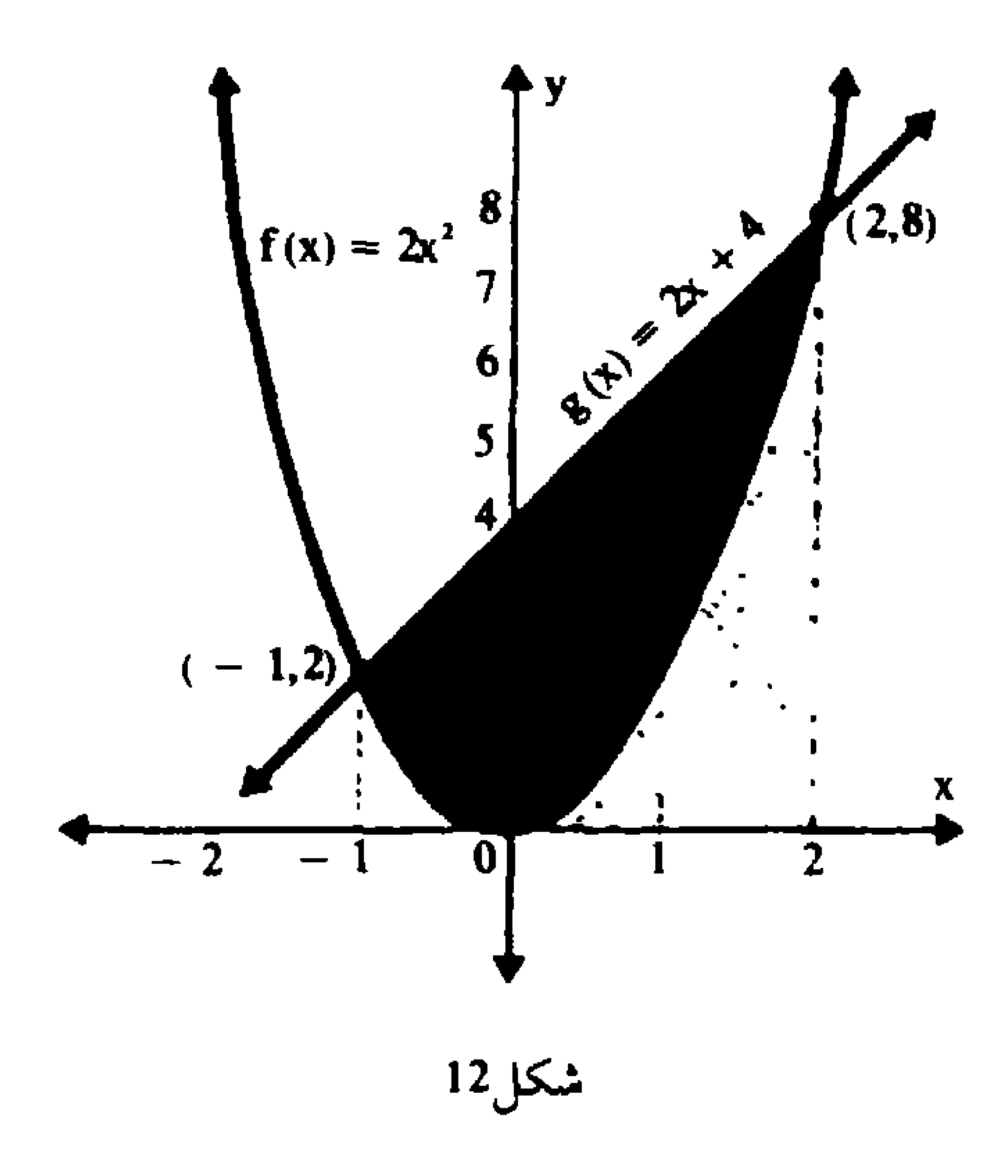
مثال «٤» :

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة

$f(x) = 2x^2$

والخط المستقيم

$$g(x) = 2x + 4$$



شكل12

(الحل) :

المنطقة المطلوب حساب مساحتها (شكل12) تقع تحت الخط المستقيم

$$g(x) = 2x + 4$$

وفوق منحني الدالة

$$f(x) = 2x^2$$

لايجاد هذه المساحة ينبغي اولاً ايجاد نقطة تقاطع المنحنيين ، أو بعبارة اخرى جميع قيم x التي تحقق المعادلة

$$f(x) = g(x)$$

أو

$$2x^2 = 2x + 4$$

فئة حلول هذه المعادلة هي $\{-1, 2\}$

واضح من (شكل12) اننا اذا طرحنا مساحة المنطقة الواقعة تحت القطع المكافىء من مساحة المنطقة الواقعة تحت الخط المستقيم لحصلنا على المساحة المطلوبة . وعليه فان

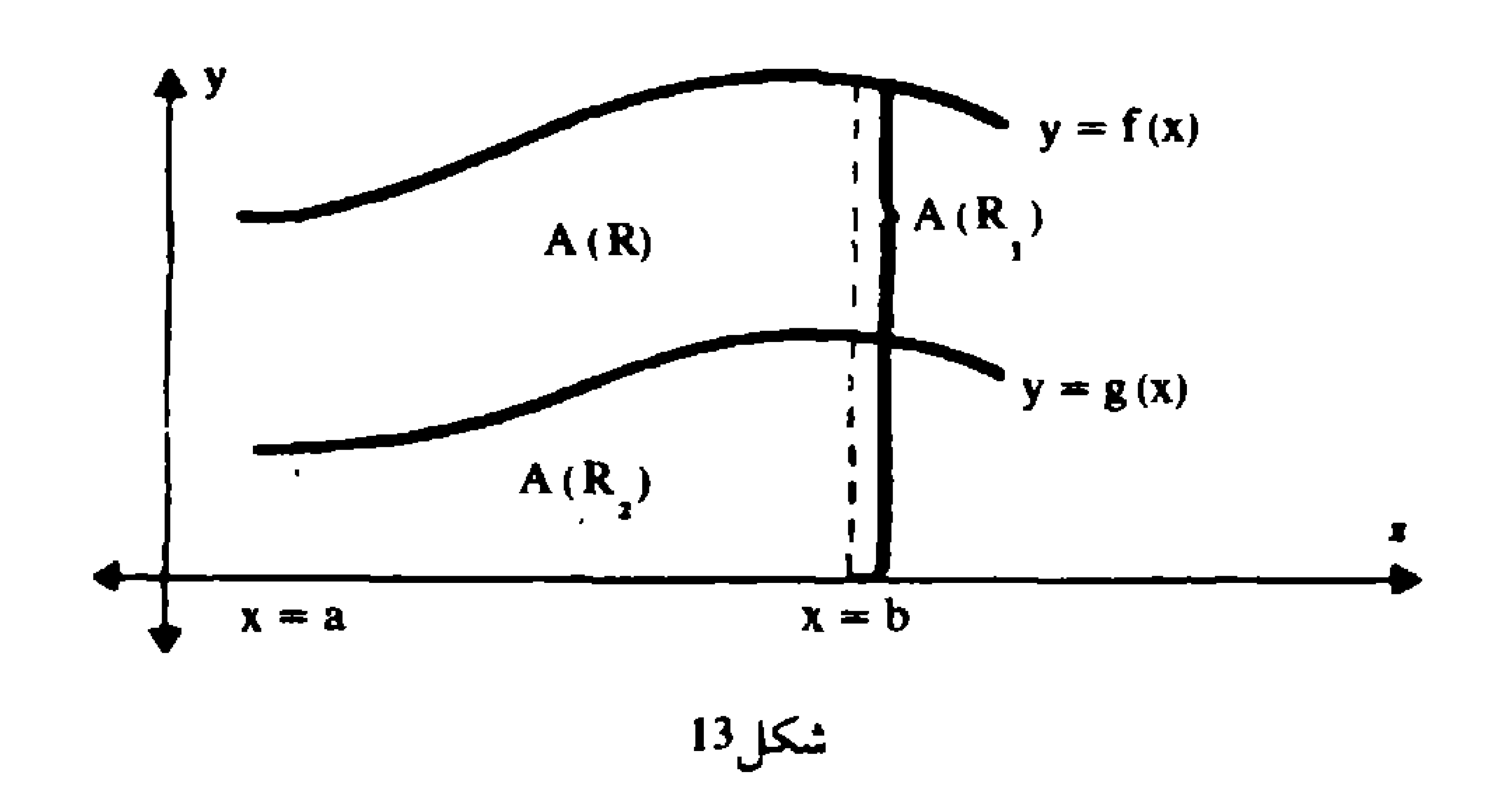
$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [(2x + 4) - 2x^2]\,dx = (x^2 + 4x - \frac{2x^3}{3}) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= (4 + 8 - \frac{16}{3}) - (1 - 4 + \frac{2}{3}) = 9$$

يمكن تطبيق هذه الطريقة في جميع الحالات المماثلة .

ننتقل الآن الى طريقة ايجاد مساحة منطقة محصورة بين منحنيي دالتين f و g متصلتين وقيمهما موجبة أو صفر من $x = a$ الى $x = b$



شكل13

افرض، كما هو مرسوم في (شكل13) ان

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \,, x \in [a,b]$$

والمطلوب ايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالة f ومنحني الدالة g من $x = a$ الى $x = b$. اذا عبر عن مساحة المنطقة المطلوبة $A(R)$ ومساحة المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة f بـ $A(R_1)$ ومساحة المنطقة الواقعة تحت منحني الدالة g بـ $A(R_2)$ فمن الواضح ان

$$A(R) = A(R_1) - A(R_2)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

المثال التالي يوضح كيفية استعمال هذه الطريقة في ايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي دالتين .

مثال «٥» :

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين

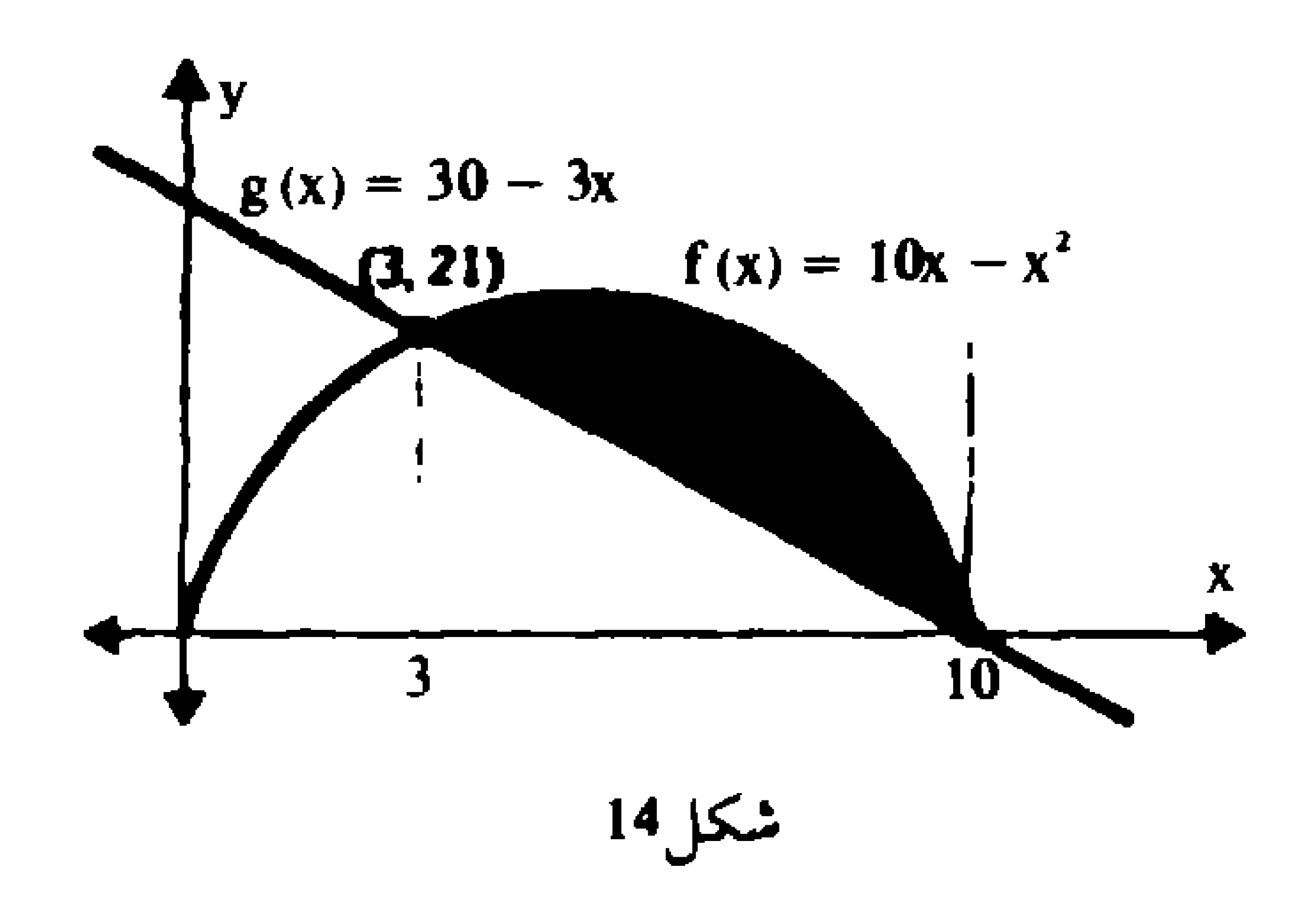
$f(x) = 10x - x^2 \quad , g(x) = 30 - 3x$

(الحل) :

لنجد أولاً نقاط التقاطع . أي أن علينا ايجاد جميع قيم x التي تحقق المعادلة

$f(x) = g(x)$

اذا



شكل 14

$$30 - 3x = 10x - x^2$$
$$x^2 - 13x + 30 = 0$$
$$(x - 3)(x - 10) = 0$$

اذا فئة الحلول هي{3,10} ومنها نجد قيم y . وعليه فان نقاط التقاطع هي(3,21) و(10,0) وكذلك نرى انه عندما تكون $3 \leqslant x \leqslant 10$

$f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$

اذا المساحة المطلوبة هي

$$\int_{3}^{10} [(10x - x^2) - (30 - 3x)]\, dx = \int_{3}^{10} [-x^2 + 13x - 30]\, dx$$

$$= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{13x^2}{2} - 30x\right)\Big|_{3}^{10} = \frac{343}{6}$$

تمارين (٤) :

أكتب مساحات المناطق التالية على شكل تكاملات محددة ثم احسب المساحات .

1 . المنطقة المحصورة بين الخط المستقيم

$f(x) = 3x + 2$

ومحور x من $x = 2$ الى $x = 6$ حقق جوابك بايجاد مساحة شبه المنحرف

2 . المنطقة المحصورة بين $f(x) = x$ ومحور x من $x = 0$ الى $x = 4$.

3 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ومحور x من $x = 1$ الى $x = 4$

4 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ومحور x من $x = 1$ الى $x = 2$.

5 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ ومحور x من $x = 1$ الى $x = 3$.

6 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = e^{3x}$ ومحور x من $x = 0$ الى $x = 2$.

7 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = 4 - x^2$ والخط المستقيم $g(x) = x + 2$.

8 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = 16 - x^2$ ومنحني الدالة $g(x) = x^2$.

(أ) من $x = 0$ الى $x = 1$.

(ب) المجموع الكلي لمساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين .

9 . المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = 2 + x - x^2$ والخط المستقيم $g(x) = -x - 1$.

10 . أوجد مساحة المثلث الذي أضلاعه

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

$$g(x) = x - 4$$

$$h(x) = -5x + 8$$

يعرض هذا الكتاب في صورة متدرجة للأسس التي ينبغي على الطالب الالمام بها لتساعده على دراسة مقررات الأساليب الكمية والاقتصاد والعلوم الادارية والاجتماعية، ويتميز الكتاب إلى جانب ذلك بدقة التعبير وكثرة الأمثلة التوضيحية مع البراهين المبسطة والعناية بالجانب التطبيقي ويتكون الكتاب من جزأين يركز الأول منهما على بعض الأسس الجبرية أما الثاني فيركز على مفاهيم رياضية أخرى مثل نظرية الفئات ونظرية الاحتمالات ومبادىء الاحصاء وحساب التفاضل والتكامل.